

Sujets de Baccalauréat Mathématiques

SESSION 2021

Liste complète des sujets originaux

13 sujets



Table des matières

1 ►	Sujet Zéro (21-MATZERO)	1
2 ►	Sujet 1 (21-MATUN)	11
3 ►	Sujet 2 (21-MATDEUX)	18
4 ►	Amérique du Nord - Jour 1 (21-MATJ1AN1)	25
5 ►	Polynésie - Jour 2 (21-MATJ2PO1)	32
6 ►	Métropole - Jour 1 Session 2 (21-MATJ1ME2)	42
7 ►	Métropole - Jour 2 Session 2 (21-MATJ2ME2)	50
8 ►	Asie - Jour 1 (21-MATJ1JA1)	57
9 ►	Asie - Jour 2 (21-MATJ2JA1)	64
10 ►	Centres Étrangers - Jour 1 (21-MATJ1G11)	73
11 ►	Centres Étrangers - Jour 2 (21-MATJ2G11)	83
12 ►	Métropole - Jour 1 Remplacement (21-MATJ1ME3)	93
13 ►	Métropole - Jour 2 Remplacement (21-MATJ2ME3)	103

1 Sujet Zéro (21-MATZERO)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Session 2021 – sujet 0

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collègue », est autorisé.

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et **un seul** des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1 à 9

EXERCICE 1 commun à tous les candidats (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n , vérifie $u_n \leq w_n \leq v_n$.

On peut affirmer que :

- a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques. b. La suite (w_n) converge vers 1.
c. La suite (u_n) est minorée par 1. d. La suite (w_n) est croissante.
2. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = xe^{x^2}$.
La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur \mathbb{R} par :

- a. $f'(x) = 2xe^{x^2}$ b. $f'(x) = (1 + 2x)e^{x^2}$
c. $f'(x) = (1 + 2x^2)e^{x^2}$ d. $f'(x) = (2 + x^2)e^{x^2}$

3. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 2x + 1}$?

- a. -1 b. 0 c. $\frac{1}{2}$ d. $+\infty$

4. On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1; 1]$ telle que
 $h(-1) = 0$ $h(0) = 2$ $h(1) = 0$.

On peut affirmer que :

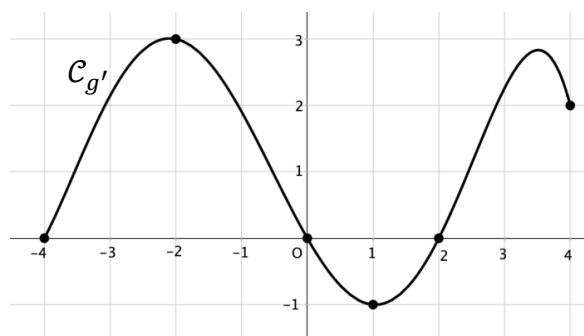
- a. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1; 0]$.
b. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-1; 1]$.
c. Il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[0; 1]$ tel que $h(a) = 1$.
d. L'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1; 1]$.

5. On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4; 4]$.

On donne ci-contre la représentation graphique de sa fonction dérivée g' .

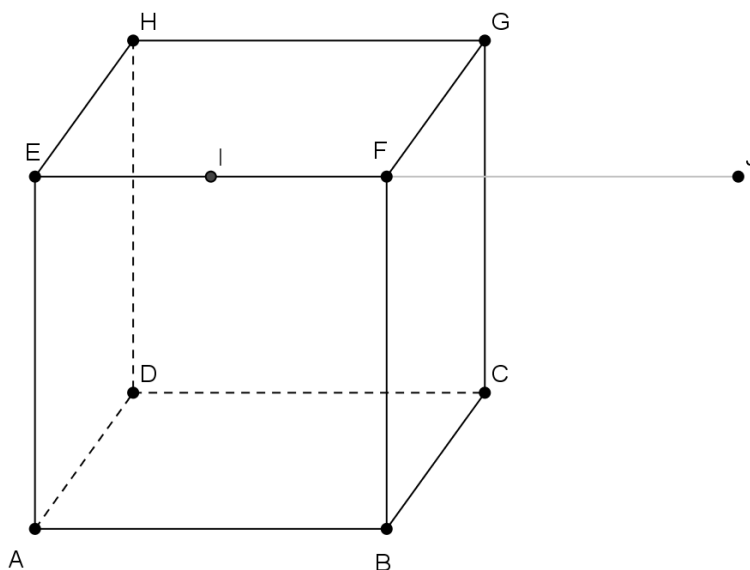
On peut affirmer que :

- a. g admet un maximum en -2 .
b. g est croissante sur l'intervalle $[1; 2]$.
c. g est convexe sur l'intervalle $[1; 2]$.
d. g admet un minimum en 0 .



EXERCICE 2 commun à tous les candidats (5 points)

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1, le milieu I de [EF] et J le symétrique de E par rapport à F.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1.
 - a. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points I et J.
 - b. En déduire les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{DJ} , \overrightarrow{BI} et \overrightarrow{BG} .
 - c. Montrer que \overrightarrow{DJ} est un vecteur normal au plan (BGI).
 - d. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.
2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
 - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d .
 - b. On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$.
Montrer que L est le point d'intersection de la droite d et du plan (BGI).
3. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$
 où \mathcal{B} est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.
 - a. Calculer le volume de la pyramide FBGI.
 - b. En déduire l'aire du triangle BGI.

EXERCICE 3 commun à tous les candidats (5 points)

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :

- la formation avec *conduite accompagnée* ;
- la formation *traditionnelle*.

On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :

- 75 personnes ont suivi une formation avec *conduite accompagnée* ; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.
- 225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation *traditionnelle* ; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.

On considère les événements suivants :

A : « la personne a suivi une formation avec *conduite accompagnée* » ;

R_1 : « la personne a réussi l'examen à la première présentation » ;

R_2 : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation » ;

R_3 : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

1. Modéliser la situation par un arbre pondéré.

Dans les questions suivantes, les probabilités demandées seront données sous forme d'une fraction irréductible.

2. a. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* et réussi l'examen à sa deuxième présentation.

b. Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à $\frac{1}{3}$.

c. La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* ?

3. On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite.

Ainsi, $\{X = 1\}$ correspond à l'événement R_1 .

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

b. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

4. On choisit, successivement et de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où n est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de n personnes parmi les 300 personnes du groupe.

On admet que la probabilité de l'événement R_3 est égale à $\frac{1}{6}$.

- a. Dans le contexte de cette question, préciser un événement dont la probabilité est égale à

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

On considère la fonction Python **seuil** ci-dessous, où p est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 1[$.

```
def seuil(p):  
    n = 1  
    while 1-(5/6)**n <= p:  
        n = n+1  
    return n
```

- b. Quelle est la valeur renvoyée par la commande **seuil(0.9)** ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter **un seul des deux exercices A ou B**.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A (5 points)

Principaux domaines abordés

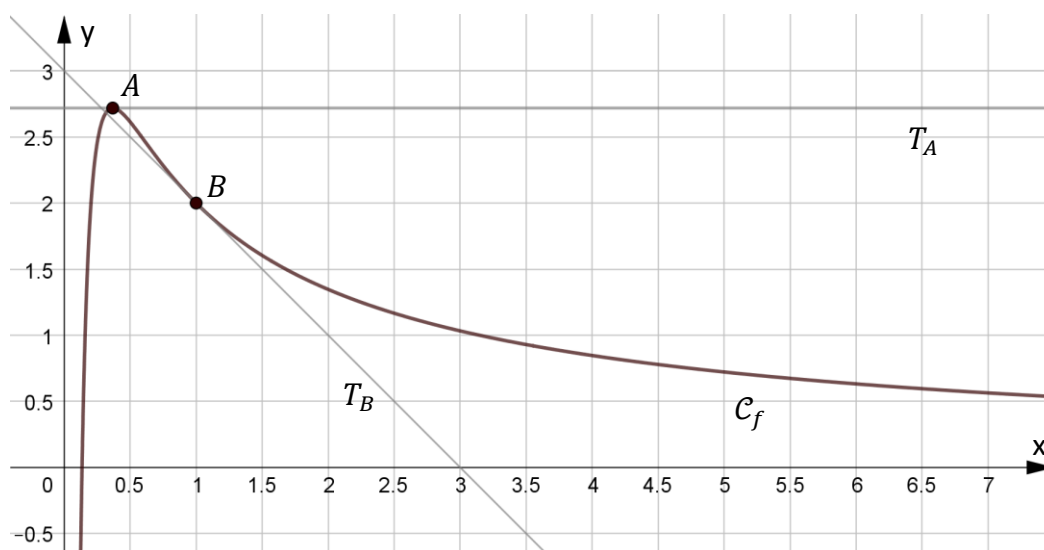
Logarithme

Dérivation, convexité, limites

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative \mathcal{C}_f d'une fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$;
- la tangente T_A à la courbe \mathcal{C}_f au point A de coordonnées $(\frac{1}{e} ; e)$;
- la tangente T_B à la courbe \mathcal{C}_f au point B de coordonnées $(1 ; 2)$.

La droite T_A est parallèle à l'axe des abscisses. La droite T_B coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3 ; 0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0 ; 3)$.



On note f' la fonction dérivée de f .

Partie I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'(\frac{1}{e})$ et de $f'(1)$.
2. En déduire une équation de la droite T_B .

Partie II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2 + \ln(x)}{x}.$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe \mathcal{C}_f passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1 - \ln(x)}{x^2}.$$

4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f

On admet que, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$,

$$f''(x) = \frac{1 + 2 \ln(x)}{x^3}.$$

Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

Exercice B

Principaux domaines abordés

Équations différentielles

Fonction exponentielle ; suites

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225 °C.

On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four.

On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t , exprimée en heure, après la sortie du four.

Ainsi, $f(0,5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.

Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25 °C.

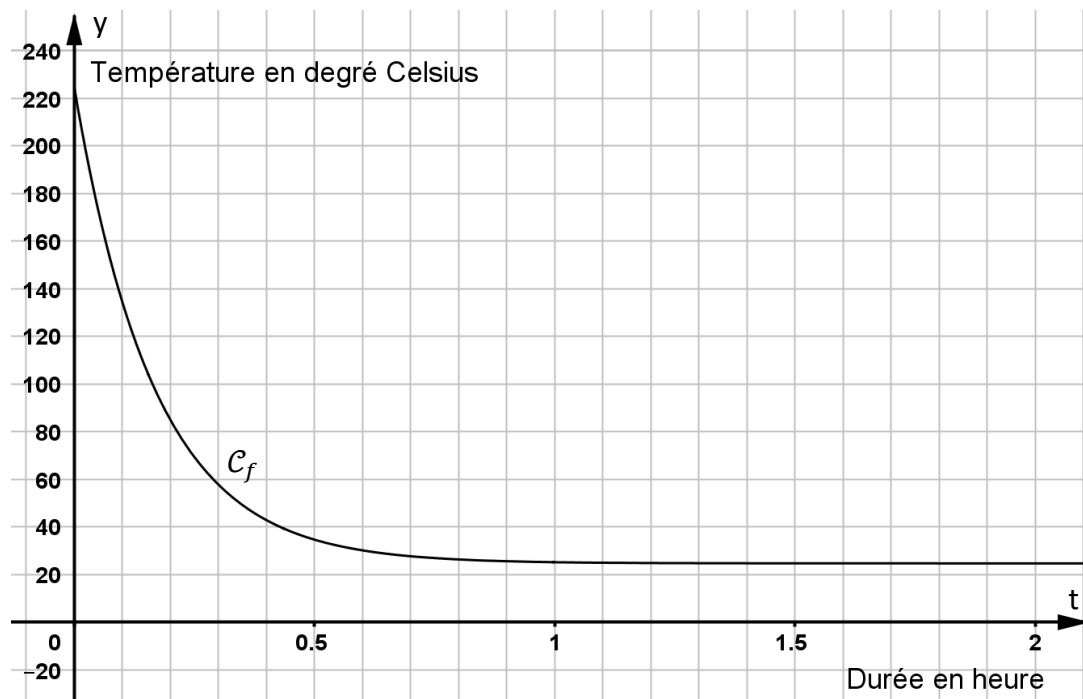
On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

1.
 - a. Préciser la valeur de $f(0)$.
 - b. Résoudre l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.
 - c. En déduire que pour tout réel $t \geq 0$, on a $f(t) = 200 e^{-6t} + 25$.
2. Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four :
 - décroît ;
 - tend à se stabiliser à la température ambiante.La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?
3. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution dans $[0 ; +\infty[$.

Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40 °C. On note T_0 le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon.

On donne en page suivante la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.

4. Avec la précision permise par le graphique, lire T_0 . On donnera une valeur approchée de T_0 sous forme d'un nombre entier de minutes.



5. On s'intéresse ici à la diminution, minute après minute, de la température d'une baguette à sa sortie du four.

Ainsi, pour un entier naturel n , D_n désigne la diminution de température en degré Celsius d'une baguette entre la n -ième et la $(n + 1)$ -ième minute après sa sortie du four.

On admet que, pour tout entier naturel n :

$$D_n = f\left(\frac{n}{60}\right) - f\left(\frac{n+1}{60}\right).$$

a. Vérifier que 19 est une valeur approchée de D_0 à 0,1 près, et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

b. Vérifier que l'on a, pour tout entier naturel n : $D_n = 200 e^{-0,1n}(1 - e^{-0,1})$.

En déduire le sens de variation de la suite (D_n) , puis la limite de la suite (D_n) .

Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de l'exercice ?

2 Sujet 1 (21-MATUN)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : **4 heures**

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collègue » est autorisé.*

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1, commun à tous les candidats (5 points)

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie I

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement.

On notera :

- D l'événement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'événement « le candidat a été admis à l'école » ;
- \bar{D} et \bar{A} les événements contraires des événements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.
3. Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à 0,24.
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie II

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à 0,24.

On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.

- a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?
 - b. Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.
 - c. Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.
2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul. On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à 0,24 et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.
 - a. Donner l'expression, en fonction de n , de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.
 - b. À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à 0,99 ?

Exercice 2, commun à tous les candidats (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1.

a. Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe C_f .

2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .

3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.

4. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

5. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.

On note A un éventuel point de C_f d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe C_f est parallèle à la droite Δ .

a. Montrer que a est solution de l'équation $e^x(x-1) + x^2 = 0$.

On note g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x(x-1) + x^2$.

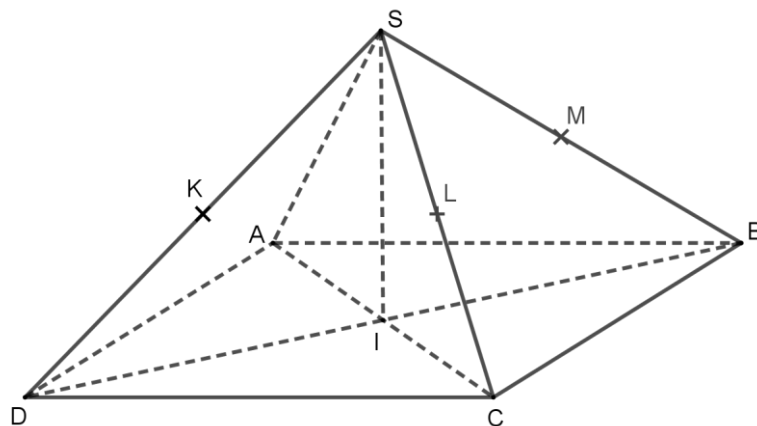
On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

b. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0; +\infty[$.

c. Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à C_f est parallèle à la droite Δ .

Exercice 3, commun à tous les candidats (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur. Le point I est le centre du carré ABCD. On suppose que : $IC = IB = IS = 1$. Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

- a. (DK) et (SD) b. (AS) et (IC) c. (AC) et (SB) d. (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $(I ; \vec{IC}, \vec{IB}, \vec{IS})$.

Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$I(0 ; 0 ; 0) ; A(-1 ; 0 ; 0) ; B(0 ; 1 ; 0) ; C(1 ; 0 ; 0) ; D(0 ; -1 ; 0) ; S(0 ; 0 ; 1).$$

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

- a. $\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ b. $\left(\frac{1}{4} ; -\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ c. $\left(-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ d. $\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} ; 1\right)$

3. Les coordonnées du vecteur \vec{AS} sont :

- a. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

- a. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ b. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ c. $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ d. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

5. Une équation cartésienne du plan (SCB) est :

- a. $y + z - 1 = 0$ b. $x + y + z - 1 = 0$ c. $x - y + z = 0$ d. $x + z - 1 = 0$

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés :

Suites numériques ; raisonnement par récurrence ; suites géométriques.

La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) .

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421875
6	4	4,31640625

2.

a. Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) .

3.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $n \leq u_n \leq n + 1$.

b. En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .

c. Démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

Exercice B

Principaux domaines abordés :
Fonction logarithme ; convexité.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 4 - 4 \ln(x) - \frac{3}{x}$$

où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

On note \mathcal{C} la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}.$$

3.

a. Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites de f en 0 et en $+\infty$. On admettra que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

b. Par simple lecture du tableau de variations, préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{5}{3}$.

4. Étudier la convexité de la fonction f , c'est-à-dire préciser les parties de l'intervalle $]0; +\infty[$ sur lesquelles f est convexe, et celles sur lesquelles f est concave. On justifiera que la courbe \mathcal{C} admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.

3 Sujet 2 (21-MATDEUX)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collègue » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1, commun à tous les candidats (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

PARTIE I

Dans un centre de traitement du courrier, une machine est équipée d'un lecteur optique automatique de reconnaissance de l'adresse postale. Ce système de lecture permet de reconnaître convenablement 97 % des adresses ; le reste du courrier, que l'on qualifiera d'illisible pour la machine, est orienté vers un employé du centre chargé de lire les adresses. Cette machine vient d'effectuer la lecture de neuf adresses. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'adresses illisibles parmi ces neuf adresses.

On admet que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0,03$.

1. La probabilité qu'aucune des neuf adresses soit illisible est égale, au centième près, à :

- a. 0 b. 1 c. 0,24 d. 0,76

2. La probabilité qu'exactement deux des neuf adresses soient illisibles pour la machine est :

- a. $\binom{9}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$ b. $\binom{7}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$
c. $\binom{9}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$ d. $\binom{7}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$

3. La probabilité qu'au moins une des neuf adresses soit illisible pour la machine est :

- a. $P(X < 1)$ b. $P(X \leq 1)$ c. $P(X \geq 2)$ d. $1 - P(X = 0)$

PARTIE II

Une urne contient 5 boules vertes et 3 boules blanches, indiscernables au toucher.

On tire au hasard successivement et **sans remise** deux boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

- V_1 : « la première boule tirée est verte » ;
- B_1 : « la première boule tirée est blanche » ;
- V_2 : « la seconde boule tirée est verte » ;
- B_2 : « la seconde boule tirée est blanche ».

4. La probabilité de V_2 sachant que V_1 est réalisé, notée $P_{V_1}(V_2)$, est égale à :

- a. $\frac{5}{8}$ b. $\frac{4}{7}$ c. $\frac{5}{14}$ d. $\frac{20}{56}$

5. La probabilité de l'événement V_2 est égale à :

- a. $\frac{5}{8}$ b. $\frac{5}{7}$ c. $\frac{3}{28}$ d. $\frac{9}{7}$

Exercice 2, commun à tous les candidats (6 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, **on admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

1.

- Calculez u_1 et v_1 .
- Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n \geq 1$.
- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq n + 1$.
- En déduire la limite de la suite (u_n) .

2. On pose, pour tout entier naturel n :

$$r_n = \frac{v_n}{u_n}.$$

On admet que :

$$r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

a. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}.$$

b. En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

c. Déterminer la limite de la suite (r_n^2) et en déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.

d. Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil():
    n=0
    r=1
    while abs(r-sqrt(2))>10**(-4) :
        r=(2+r)/(1+r)
        n=n+1
    return n
```

(abs désigne la valeur absolue, sqrt la racine carrée et $10^{**}(-4)$ représente 10^{-4})

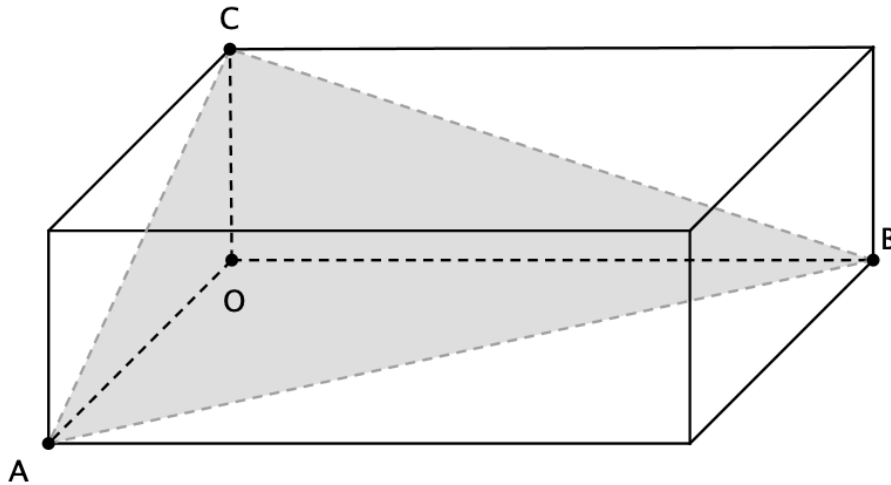
La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.

À quoi correspond-elle ?

Exercice 3, commun à tous les candidats (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

A de coordonnées $(2; 0; 0)$, B de coordonnées $(0; 3; 0)$ et C de coordonnées $(0; 0; 1)$.



L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.

1.
 - a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
 - b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $3x + 2y + 6z - 6 = 0$.
2. On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).
 - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
 - b. Montrer que la droite d coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $\left(\frac{18}{49}; \frac{12}{49}; \frac{36}{49}\right)$.
 - c. Calculer la distance OH.
3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}Bh$, où B est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide OABC, déterminer l'aire du triangle ABC.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

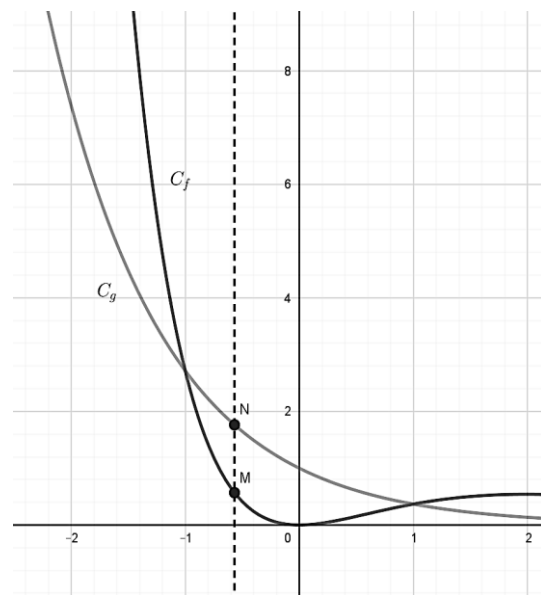
Exercice A

Principaux domaines abordés :

Fonction exponentielle ; dérivation.

Le graphique ci-contre représente, dans un repère orthogonal, les courbes C_f et C_g des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}.$$



La question 3 est indépendante des questions 1 et 2.

1. a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_f et C_g .
b. Étudier la position relative des courbes C_f et C_g .
2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1 ; 1]$, on considère les points M de coordonnées $(x ; f(x))$ et N de coordonnées $(x ; g(x))$, et on note $d(x)$ la distance MN.
On admet que : $d(x) = e^{-x} - x^2 e^{-x}$.

On admet que la fonction d est dérivable sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ et on note d' sa fonction dérivée.

- a. Montrer que $d'(x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 1)$.
 - b. En déduire les variations de la fonction d sur l'intervalle $[-1 ; 1]$.
 - c. Déterminer l'abscisse commune x_0 des points M_0 et N_0 permettant d'obtenir une distance $d(x_0)$ maximale, et donner une valeur approchée à 0,1 près de la distance $M_0 N_0$.
3. Soit Δ la droite d'équation $y = x + 2$.
On considère la fonction h dérivable sur \mathbb{R} et définie par : $h(x) = e^{-x} - x - 2$.
En étudiant le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$, déterminer le nombre de points d'intersection de la droite Δ et de la courbe C_g .

Exercice B

Principaux domaines abordés :

Fonction logarithme ; dérivation.

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(x) + 2x - 2$.

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et 0 .
2. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $]0; +\infty[$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$.
4. Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de g sur $]0; +\infty[$.

Partie II : Étude d'une fonction f

On considère la fonction f , définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1)$.

1. a. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa dérivée. Démontrer que, pour tout x de $]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

- b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$. Le calcul des limites n'est pas demandé.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$ puis dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie III : Étude d'une fonction F admettant pour dérivée la fonction f

On admet qu'il existe une fonction F dérivable sur $]0; +\infty[$ dont la dérivée F' est la fonction f . Ainsi, on a : $F' = f$.

On note \mathcal{C}_F la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On ne cherchera pas à déterminer une expression de $F(x)$.

1. Étudier les variations de F sur $]0; +\infty[$.
2. La courbe représentative \mathcal{C}_F de F admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ? Justifier la réponse.

4 Amérique du Nord - Jour 1 (21-MATJ1AN1)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collègue » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Exercice 1 commun à tous les candidats (5 points)

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3} .

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est 0,98 (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est 0,995 (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme. On note D l'événement « l'athlète est dopé » et T l'événement « le test est positif ». On admet que la probabilité de l'événement D est égale à 0,08.

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(T) = 0,083$.
3.
 - a. Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?
 - b. Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'événement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à 0,95.
Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

Partie B

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est 0,103.

1. Dans cette question 1., on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.
 - a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X . Préciser ses paramètres.
 - b. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
 - c. Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?
2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'événement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à 0,75 ? Justifier.

Exercice 2 commun à tous les candidats (5 points)

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique.

Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,6 \\ u_{n+1} = 0,75 u_n (1 - 0,15 u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020 + n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = 0,75x (1 - 0,15x)$.

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$ et dresser son tableau de variations.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; 1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.
b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
c. Déterminer la limite l de la suite (u_n) .

5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

- a. Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.
- b. Le biologiste a programmé en langage Python la fonction **menace()** ci-dessous :

```
def menace():  
    u=0.6  
    n=0  
    while u>0.02  
        u=0.75*u*(1-0.15*u)  
        n=n+1  
    return n
```

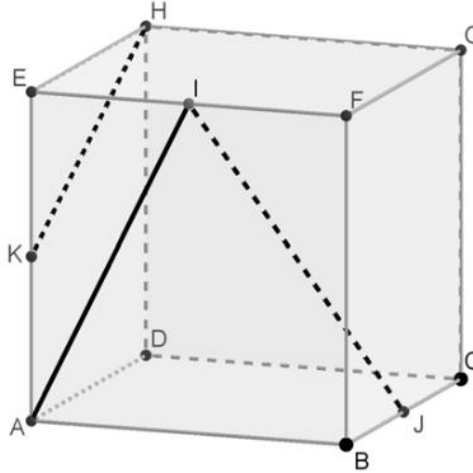
Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction **menace()**.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 commun à tous les candidats (5 points)

Les questions 1. à 5. de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

2. **a.** Donner les coordonnées des points I et J.
b. Montrer que les vecteurs \overrightarrow{IJ} , \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{AC} sont coplanaires.

On considère le plan P d'équation $x + 3y - 2z + 2 = 0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 8 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbf{R} \quad \text{et} \quad d_2: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + t \\ z = 8 + 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

3. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.
4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan P.
5. Montrer que le point $L(4, 0, 3)$ est le projeté orthogonal du point $M(5, 3, 1)$ sur le plan P.

Exercice au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Exercice A

Principaux domaines abordés :

- Fonction exponentielle
- Convexité

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. On justifiera chaque réponse.

Affirmation 1 : Pour tous réels a et b , $(e^{a+b})^2 = e^{2a} + e^{2b}$.

Affirmation 2 : Dans le plan muni d'un repère, la tangente au point A d'abscisse 0 à la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = -2 + (3 - x)e^x$ admet pour équation réduite $y = 2x + 1$.

Affirmation 3 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - e^x + \frac{3}{x} = 0$.

Affirmation 4 : L'équation $1 - x + e^{-x} = 0$ admet une seule solution appartenant à l'intervalle $[0 ; 2]$.

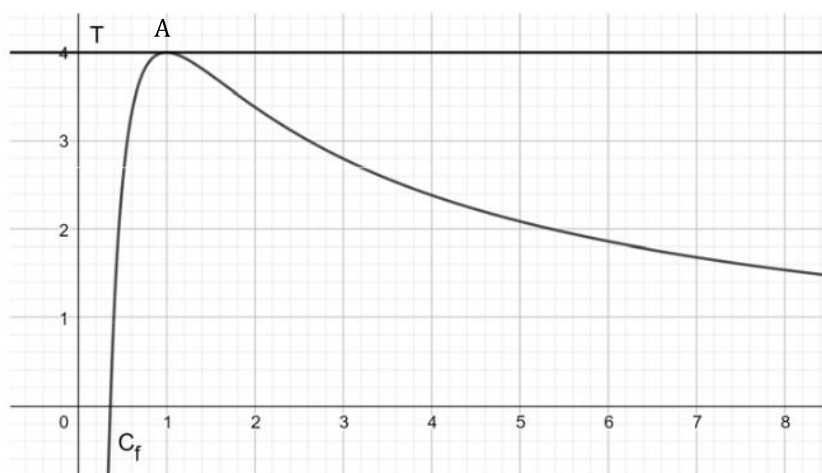
Affirmation 5 : La fonction g définie sur \mathbf{R} par $g(x) = x^2 - 5x + e^x$ est convexe.

Exercice B

Principaux domaines abordés :

- Fonction logarithme népérien
- Convexité

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe C_f représentative d'une fonction f , deux fois dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. La courbe C_f admet une tangente horizontale T au point $A(1, 4)$.



1. Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a + b \ln x}{x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{b - a - b \ln x}{x^2}.$$

3. En déduire les valeurs des réels a et b .

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4 \ln x}{x}.$$

4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
5. Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f''(x) = \frac{-4 + 8 \ln x}{x^3}.$$

7. Montrer que la courbe C_f possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

5 Polynésie - Jour 2 (21-MATJ2PO1)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collègue » est autorisé.*

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

EXERCICE 1 commun à tous les candidats (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95 u_n + 200.$$

1. Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9\,415$.

2.

a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$u_n > 4\,000.$$

b. On admet que la suite (u_n) est décroissante. Justifier qu'elle converge.

3. Pour tout entier naturel n , on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4\,000$.

a. Calculer v_0 .

b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0,95^n.$$

d. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier la réponse.

4. En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.

Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.

Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 commun à tous les candidats (5 points)

Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays.

Selon les autorités sanitaires de ce pays, 7 % des habitants sont infectés par cette maladie.

Parmi les individus infectés, 20 % sont déclarés négatifs.

Parmi les individus sains, 1 % sont déclarés positifs.

Une personne est choisie au hasard dans la population.

On note :

- M l'évènement : « la personne est infectée par la maladie » ;
- T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2.

a. Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée par la maladie et que son test soit positif ?

b. Montrer que la probabilité que son test soit positif est de 0,0653.

3. On sait que le test de la personne choisie est positif.

Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ?

On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.

4. On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.

b. Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif.

On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.

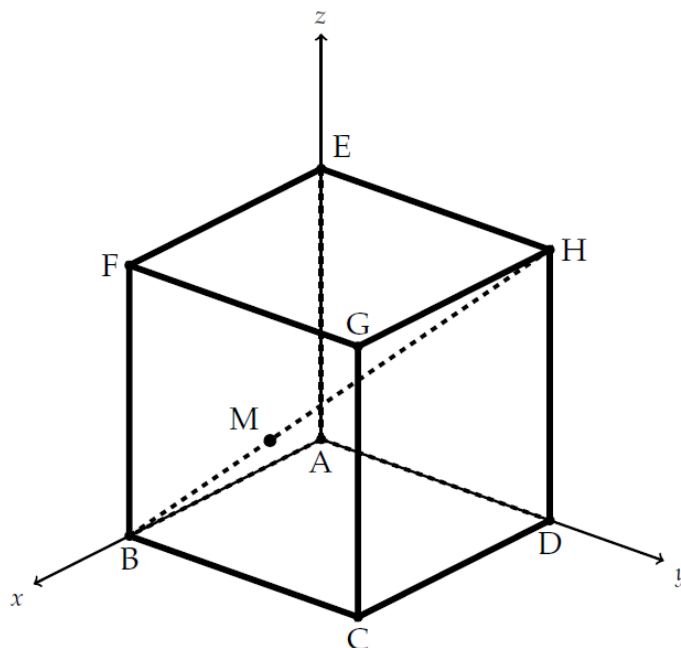
5. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes ait un test positif, soit supérieure à 99 %.

EXERCICE 3 commun à tous les candidats (5 points)

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur égale à 1.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On considère le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BH}$.



1. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H.

2.

a. Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.

b. On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4} c^2$.

Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

4.

a. Justifier que le vecteur $\vec{n}(-1; 1; 1)$ est normal au plan (EGD).

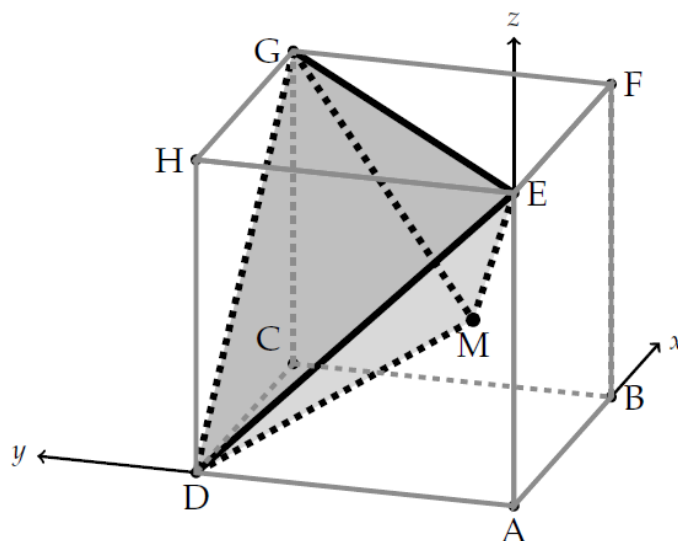
b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x + y + z - 1 = 0$.

- c. Soit \mathcal{D} la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par le point M.

Montrer qu'une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\mathcal{D}: \begin{cases} x = \frac{2}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} + t, \\ z = \frac{1}{3} + t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

5. Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :



Le but de cette question est de calculer le volume de la pyramide GEDM.

- a. Soit K, le pied de la hauteur de la pyramide GEDM issue du point M.

Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

- b. En déduire le volume de la pyramide GEDM.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{b \times h}{3}$ où b désigne l'aire d'une base et h la hauteur associée.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

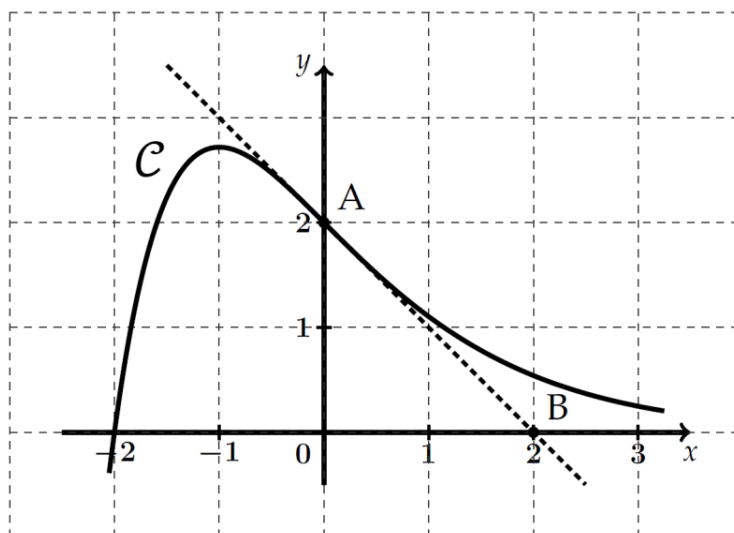
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

EXERCICE – A

Principaux domaines abordés : Fonction exponentielle, convexité, dérivation, équations différentielles.

Cet exercice est composé de trois parties indépendantes.

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative \mathcal{C} d'une fonction f définie sur \mathbf{R} :



On considère les points $A(0 ; 2)$ et $B(2 ; 0)$.

Partie 1

Sachant que la courbe \mathcal{C} passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe \mathcal{C} au point A, donner par lecture graphique :

1. La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.
2. Un intervalle sur lequel la fonction f semble convexe.

Partie 2

On note (E) l'équation différentielle $y' = -y + e^{-x}$.

On admet que $g: x \mapsto xe^{-x}$ est une solution particulière de (E) .

1. Donner toutes les solutions sur \mathbf{R} de l'équation différentielle $(H) : y' = -y$.
2. En déduire toutes les solutions sur \mathbf{R} de l'équation différentielle (E) .
3. Sachant que la fonction f est la solution particulière de (E) qui vérifie $f(0) = 2$, déterminer une expression de $f(x)$ en fonction de x .

Partie 3

On admet que pour tout nombre réel x , $f(x) = (x + 2) e^{-x}$.

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .
 - a. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = (-x - 1) e^{-x}$.
 - b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et dresser le tableau des variations de f sur \mathbf{R} .

On ne précisera ni la limite de f en $-\infty$ ni la limite de f en $+\infty$.
On calculera la valeur exacte de l'extremum de f sur \mathbf{R} .
2. On rappelle que f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f .
 - a. Calculer pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f''(x)$.
 - b. Peut-on affirmer que f est convexe sur l'intervalle $[0; +\infty[$?

EXERCICE – B

Principaux domaines abordés : Fonction logarithme népérien, dérivation.

Cet exercice est composé de deux parties.

Certains résultats de la première partie seront utilisés dans la deuxième.

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 4]$ par : $f(x) = -30x + 50 + 35 \ln x$.

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .
 - a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1 ; 4]$, montrer que :
$$f'(x) = \frac{35 - 30x}{x}.$$
 - b. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1 ; 4]$.
 - c. En déduire les variations de f sur ce même intervalle.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , sur l'intervalle $[1 ; 4]$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
3. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ pour $x \in [1 ; 4]$.

Partie 2 : Optimisation

Une entreprise vend du jus de fruits. Pour x milliers de litres vendus, avec x nombre réel de l'intervalle $[1 ; 4]$, l'analyse des ventes conduit à modéliser le bénéfice $B(x)$ par l'expression donnée en milliers d'euros par :

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x \ln x.$$

1. D'après le modèle, calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 2 500 litres de jus de fruits.
On donnera une valeur approchée à l'euro près de ce bénéfice.

2. Pour tout x de l'intervalle $[1 ; 4]$, montrer que $B'(x) = f(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B .
- 3.
- a. À l'aide des résultats de la **partie 1**, donner les variations de la fonction B sur l'intervalle $[1 ; 4]$.
 - b. En déduire la quantité de jus de fruits, au litre près, que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice maximal.

6 Métropole - Jour 1 Session 2 (21-MATJ1ME2)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

Lundi 7 juin 2021

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1, commun à tous les candidats (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x}.$$

On donne l'expression de la dérivée seconde f'' de f , définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f''(x) = \frac{2e^{2x}(2x^2 - 2x + 1)}{x^3}.$$

1. La fonction f' , dérivée de f , est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

a. $f'(x) = 2e^{2x}$

b. $f'(x) = \frac{e^{2x}(x-1)}{x^2}$

c. $f'(x) = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$

d. $f'(x) = \frac{e^{2x}(1+2x)}{x^2}$

2. La fonction f :

a. est décroissante sur $]0; +\infty[$

b. est monotone sur $]0; +\infty[$

c. admet un minimum en $\frac{1}{2}$

d. admet un maximum en $\frac{1}{2}$

3. La fonction f admet pour limite en $+\infty$:

a. $+\infty$

b. 0

c. 1

d. e^{2x}

4. La fonction f :

a. est concave sur $]0; +\infty[$

b. est convexe sur $]0; +\infty[$

c. est concave sur $]0; \frac{1}{2}]$

d. est représentée par une courbe admettant un point d'inflexion

Exercice 2, commun à tous les candidats (5 points)

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 5 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.

Un ingénieur a mis au point un test à appliquer aux pièces. Ce test a deux résultats possibles : « positif » ou bien « négatif ».

On applique ce test à une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne.

On note $p(E)$ la probabilité d'un événement E .

On considère les événements suivants :

- D : « la pièce est défectueuse » ;
- T : « la pièce présente un test positif » ;
- \bar{D} et \bar{T} désignent respectivement les événements contraires de D et T .

Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- La probabilité qu'une pièce présente un test positif sachant qu'elle défectueuse est égale à 0,98 ;
- La probabilité qu'une pièce présente un test négatif sachant qu'elle n'est pas défectueuse est égale à 0,97.

Les parties I et II peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE I

1. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. **a.** Déterminer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne soit défectueuse et présente un test positif.
b. Démontrer que : $p(T) = 0,0775$.
3. On appelle **valeur prédictive positive** du test la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant que le test est positif. On considère que pour être efficace, un test doit avoir une valeur prédictive positive supérieure à 0,95.
Calculer la valeur prédictive positive de ce test et préciser s'il est efficace.

PARTIE II

On choisit un échantillon de 20 pièces dans la production de la chaîne, en assimilant ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon.

On rappelle que : $p(D) = 0,05$.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que cet échantillon contienne au moins une pièce défectueuse.
On donnera un résultat arrondi au centième.
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 3, commun à tous les candidats (6 points)

Cécile a invité des amis à déjeuner sur sa terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a achetés surgelés.

Elle sort les gâteaux du congélateur à $-19\text{ }^{\circ}\text{C}$ et les apporte sur la terrasse où la température ambiante est de $25\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Au bout de 10 minutes la température des gâteaux est de $1,3\text{ }^{\circ}\text{C}$.

I - Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante, c'est-à-dire que l'augmentation de la température des gâteaux est la même minute après minute.

Selon ce modèle, déterminer quelle serait la température des gâteaux 25 minutes après leur sortie du congélateur.

Ce modèle semble-t-il pertinent ?

II - Second modèle

On note T_n la température des gâteaux, en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur ; ainsi $T_0 = -19$.

On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante :
pour tout entier naturel n , $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$.
2. Calculer T_1 et T_2 . On donnera des valeurs arrondies au dixième.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $T_n \leq 25$.
En revenant à la situation étudiée, ce résultat était-il prévisible ?
4. Étudier le sens de variation de la suite (T_n) .
5. Démontrer que la suite (T_n) est convergente.
6. On pose, pour tout entier naturel n , $U_n = T_n - 25$.
 - a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme U_0 .
 - b. En déduire que pour tout entier naturel n , $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$.
 - c. En déduire la limite de la suite (T_n) . Interpréter ce résultat dans le contexte de la situation étudiée.
7.
 - a. Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur. Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux ? On donnera une valeur arrondie à l'entier le plus proche.
 - b. Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de $10\text{ }^{\circ}\text{C}$. Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.

c. Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geq 10$.

```
def seuil():  
    n=0  
    T=.....  
    while T..... :  
        T=.....  
        n=n+1  
    return n
```

Recopier ce programme sur la copie et compléter les lignes incomplètes afin que le programme renvoie la valeur attendue.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer le choix, les principaux domaines abordés sont indiqués en début de chaque exercice.

Exercice A

Principaux domaines abordés :

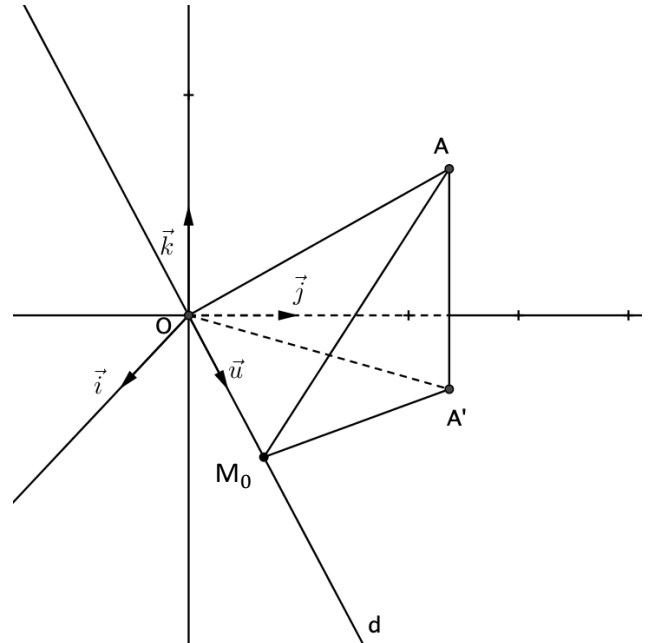
Géométrie de l'espace rapporté à un repère orthonormé ; orthogonalité dans l'espace.

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- le point A de coordonnées $(1 ; 3 ; 2)$,
- le vecteur \vec{u} de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur \vec{u} .

Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.

On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t ; t ; 0)$.
 - a. On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que :
$$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14.$$
 - b. Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2 ; 2 ; 0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale. On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.
3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.
4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1 ; 3 ; 0)$. Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.
5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.

On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}Bh$, où B est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

Exercice B

Principaux domaines abordés :

Équations différentielles ; fonction exponentielle.

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = y + 2xe^x$.

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = x^2 e^x$. On admet que u est dérivable et on note u' sa fonction dérivée. Démontrer que u est une solution particulière de (E) .
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} . On note g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = f(x) - u(x).$$

a. Démontrer que si la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) alors la fonction g est solution de l'équation différentielle : $y' = y$.

On admet que la réciproque de cette propriété est également vraie.

b. À l'aide de la résolution de l'équation différentielle $y' = y$, résoudre l'équation différentielle (E) .

3. Étude de la fonction u

- a. Étudier le signe de $u'(x)$ pour x variant dans \mathbb{R} .
- b. Dresser le tableau de variations de la fonction u sur \mathbb{R} (les limites ne sont pas demandées).
- c. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction u est concave.

7 Métropole - Jour 2 Session 2 (21-MATJ2ME2)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

Mardi 8 juin 2021

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collègue » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et **un seul des deux exercices A ou B**.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1, commun à tous les candidats (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- La droite \mathcal{D} passant par les points $A(1; 1; -2)$ et $B(-1; 3; 2)$.
- La droite \mathcal{D}' de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 6 - 3t \\ z = 8 - 6t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$
- Le plan \mathcal{P} d'équation cartésienne $x + m y - 2 z + 8 = 0$ où m est un nombre réel.

Question 1 : Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite \mathcal{D}' ?

- a. $M_1(-1; 3; -2)$ b. $M_2(11; -9; -22)$ c. $M_3(-7; 9; 2)$ d. $M_4(-2; 3; 4)$

Question 2 : Un vecteur directeur de la droite \mathcal{D}' est :

- a. $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ b. $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ c. $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ d. $\vec{u}_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Question 3 : Les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont :

- a. sécantes b. strictement parallèles c. non coplanaires d. confondues

Question 4 : La valeur du réel m pour laquelle la droite \mathcal{D} est parallèle au plan \mathcal{P} est :

- a. $m = -1$ b. $m = 1$ c. $m = 5$ d. $m = -2$

Exercice 2, commun à tous les candidats (6 points)

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

La leucose féline est une maladie touchant les chats ; elle est provoquée par un virus.

Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40 % la proportion de chats porteurs de la maladie.

On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans ce centre vétérinaire.

Ce test possède les caractéristiques suivantes.

- Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90 % des cas.
- Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85 % des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les événements suivants :

- M : « Le chat est porteur de la maladie » ;
- T : « Le test du chat est positif » ;
- \bar{M} et \bar{T} désignent les événements contraires des événements M et T respectivement.

1.

a. Traduire la situation par un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.

c. Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est égale à 0,45.

d. On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.

2. On choisit dans le centre vétérinaire un échantillon de 20 chats au hasard. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de chats présentant un test positif dans l'échantillon choisi.

a. Déterminer, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X .

b. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon exactement 5 chats présentant un test positif.

c. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon au plus 8 chats présentant un test positif.

d. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Dans cette question, on choisit un échantillon de n chats dans le centre, qu'on assimile encore à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité qu'il y ait au moins un chat présentant un test positif dans cet échantillon.

a. Montrer que $p_n = 1 - 0,55^n$.

b. Décrire le rôle du programme ci-contre écrit en langage Python, dans lequel la variable n est un entier naturel et la variable P un nombre réel.

```
def seuil():  
    n=0  
    P=0  
    while P<0.99:  
        n=n+1  
        P=1-0.55**n  
    return n
```

c. Déterminer, en précisant la méthode employée, la valeur renvoyée par ce programme.

Exercice 3, commun à tous les candidats (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}.$$

1. La copie d'écran ci-contre présente les valeurs, calculées à l'aide d'un tableur, des termes de la suite (u_n) pour n variant de 0 à 12, ainsi que celles du quotient $\frac{4}{u_n}$ (avec, pour les valeurs de u_n , affichage de deux chiffres pour les parties décimales).

n	u_n	$\frac{4}{u_n}$
0	1,00	4
1	0,80	5
2	0,67	6
3	0,57	7
4	0,50	8
5	0,44	9
6	0,40	10
7	0,36	11
8	0,33	12
9	0,31	13
10	0,29	14
11	0,27	15
12	0,25	16

À l'aide de ces valeurs, conjecturer l'expression de $\frac{4}{u_n}$ en fonction de n .

Le but de cet exercice est de démontrer cette conjecture (question 5.), et d'en déduire la limite de la suite (u_n) (question 6.).

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 0$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. Que peut-on conclure des questions 2. et 3. concernant la suite (u_n) ?

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{4}{u_n}$.

Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .

6. Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de u_n en fonction de n .

En déduire la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés dans chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés :

Fonction logarithme ; dérivation.

Partie I

On désigne par h la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

On admet que la fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

1. Déterminez les limites de h en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x de $]0; +\infty[$, $h'(x) = \frac{1-2\ln(x)}{x^3}$.
3. En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $]0; +\infty[$ et vérifier que : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
5. Déterminer le signe de $h(x)$ pour x appartenant à $]0; +\infty[$.

Partie II

On désigne par f_1 et f_2 les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_1(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad f_2(x) = x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2}.$$

On note \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 les représentations graphiques respectives de f_1 et f_2 dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0; +\infty[$, on a :

$$f_1(x) - f_2(x) = h(x).$$

2. Déduire des résultats de la **Partie I** la position relative des courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . On justifiera que leur unique point d'intersection a pour coordonnées $(\alpha; \alpha)$.
On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = 0$.

Exercice B

Principaux domaines abordés :

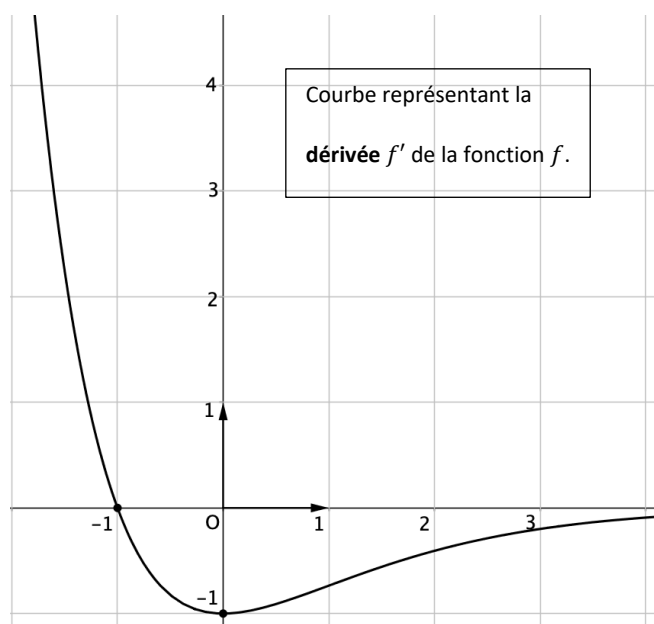
Fonction exponentielle ; dérivation ; convexité.

PARTIE I

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la **fonction dérivée** f' d'une fonction f dérivable sur \mathbb{R} .

À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .
2. La convexité de la fonction f sur \mathbb{R} .



PARTIE II

On admet que la fonction f mentionnée dans la **Partie I** est définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (x + 2)e^{-x}.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} , et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x ,

$$f(x) = \frac{x}{e^x} + 2e^{-x}.$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

Justifier que la courbe \mathcal{C} admet une asymptote que l'on précisera.

On admet que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2.

- a. Montrer que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$.
 - b. Étudier les variations sur \mathbb{R} de la fonction f et dresser son tableau de variations.
 - c. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2; -1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.
3. Déterminer, pour tout nombre réel x , l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f . Que représente pour la courbe \mathcal{C} son point A d'abscisse 0 ?

8 Asie - Jour 1 (21-MATJ1JA1)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Session 2021

MATHÉMATIQUES

Lundi 7 juin 2021

Durée de l'épreuve : **4 heures**

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.*

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.*

EXERCICE 1 commun à tous les candidats (5 points)

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020+n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. Calculer u_1 .
2. Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.
3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par `suite(10)`.

```
def suite(n) :  
    u=1000  
    for i in range(n) :  
        u=0.9*u+250  
    return u
```

4. (a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.
(b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
(c) Dédire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2\,500$ pour tout entier naturel n .
(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = -1\,500$.
(b) Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n et montrer que :
$$u_n = -1500 \times 0,9^n + 2\,500.$$

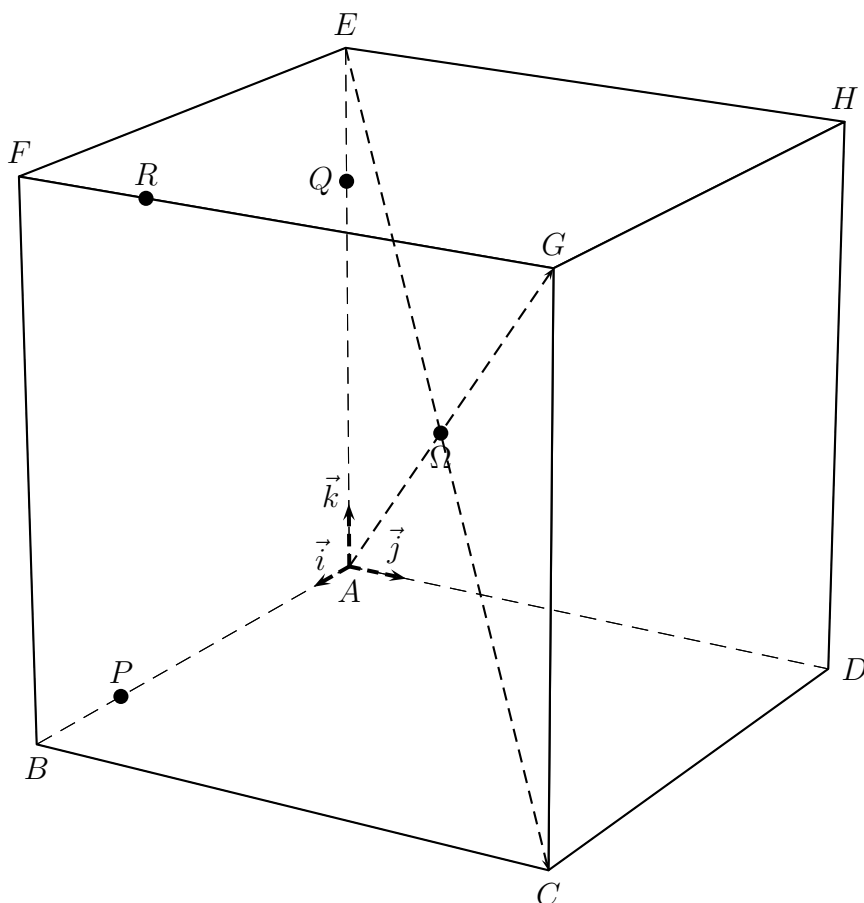
(c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte de l'exercice.
6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200. Déterminer cette année.

EXERCICE 2 commun à tous les candidats (5 points)

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 8 cm et de centre Ω .

Les points P , Q et R sont définis par $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$.

On se place dans le repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.



Partie I

- Dans ce repère, on admet que les coordonnées du point R sont $(8; 2; 8)$.
Donner les coordonnées des points P et Q .
- Montrer que le vecteur $\vec{n}(1; -5; 1)$ est un vecteur normal au plan (PQR) .
- Justifier qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est $x - 5y + z - 6 = 0$.

Partie II

On note L le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR) .

- Justifier que les coordonnées du point Ω sont $(4; 4; 4)$.
- Donner une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan (PQR) et passant par Ω .
- Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\frac{14}{3}; \frac{2}{3}; \frac{14}{3}\right)$.
- Calculer la distance du point Ω au plan (PQR) .

EXERCICE 3 commun à tous les candidats (5 points)

Un sac contient les huit lettres suivantes : A B C D E F G H (2 voyelles et 6 consonnes).

Un jeu consiste à tirer simultanément au hasard deux lettres dans ce sac. On gagne si le tirage est constitué d'une voyelle et d'une consonne.

1. Un joueur extrait simultanément deux lettres du sac.
 - (a) Déterminer le nombre de tirages possibles.
 - (b) Déterminer la probabilité que le joueur gagne à ce jeu.

Les questions 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes.

Pour la suite de l'exercice, on admet que la probabilité que le joueur gagne est égale à $\frac{3}{7}$.

2. Pour jouer, le joueur doit payer k euros, k désignant un entier naturel non nul.
Si le joueur gagne, il remporte la somme de 10 euros, sinon il ne remporte rien.
On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur (c'est-à-dire la somme remportée à laquelle on soustrait la somme payée).
 - (a) Déterminer la loi de probabilité de G .
 - (b) Quelle doit être la valeur maximale de la somme payée au départ pour que le jeu reste favorable au joueur ?
3. Dix joueurs font chacun une partie. Les lettres tirées sont remises dans le sac après chaque partie.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs gagnants.
 - (a) Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
 - (b) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} , qu'il y ait exactement quatre joueurs gagnants.
 - (c) Calculer $P(X \geq 5)$ en arrondissant à 10^{-3} . Donner une interprétation du résultat obtenu.
 - (d) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $P(X \leq n) \geq 0,9$.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter UN SEUL des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

EXERCICE - A

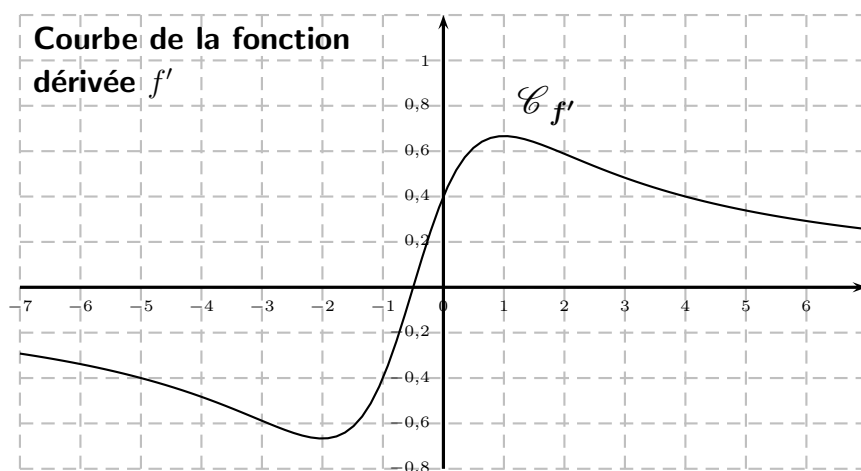
Principaux domaines abordés

- convexité
- fonction logarithme

Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} .

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f' .



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes.

- Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.
- (a) Donner les variations de la fonction dérivée f' .
(b) En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$.

- Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- En déduire le tableau des variations de f . On veillera à placer les limites dans ce tableau.
- (a) Justifier que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.
(b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
- La fonction f' est dérivable sur \mathbb{R} . On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}$.

Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f .

EXERCICE - B

Principaux domaines abordés

- Étude de fonction, fonction exponentielle
- Équations différentielles

Partie I

Considérons l'équation différentielle

$$y' = -0,4y + 0,4$$

où y désigne une fonction de la variable t , définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.

- (a) Déterminer une solution particulière constante de cette équation différentielle.
(b) En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.
- Déterminer la fonction g , solution de cette équation différentielle, qui vérifie $g(0) = 10$.

Partie II

Soit p la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $p(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{1 + 9e^{-0,4t}}$.

- Déterminer la limite de p en $+\infty$.
- Montrer que $p'(t) = \frac{3,6e^{-0,4t}}{(1 + 9e^{-0,4t})^2}$ pour tout $t \in [0; +\infty[$.
- (a) Montrer que l'équation $p(t) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.
(b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près à l'aide d'une calculatrice.

Partie III

- p désigne la fonction de la partie II.
Vérifier que p est solution de l'équation différentielle $y' = 0,4y(1 - y)$ avec la condition initiale $y(0) = \frac{1}{10}$ où y désigne une fonction définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.
- Dans un pays en voie de développement, en l'année 2020, 10 % des écoles ont accès à internet. Une politique volontariste d'équipement est mise en œuvre et on s'intéresse à l'évolution de la proportion des écoles ayant accès à internet. On note t le temps écoulé, exprimé en année, depuis l'année 2020.
La proportion des écoles ayant accès à internet à l'instant t est modélisée par $p(t)$.
Interpréter dans ce contexte la limite de la question II 1 puis la valeur approchée de α de la question II 3(b) ainsi que la valeur $p(0)$.

9 Asie - Jour 2 (21-MATJ2JA1)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Session 2021

MATHÉMATIQUES

Mardi 8 juin 2021

Durée de l'épreuve : **4 heures**

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.*

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.*

EXERCICE 1 commun à tous les candidats (5 points)

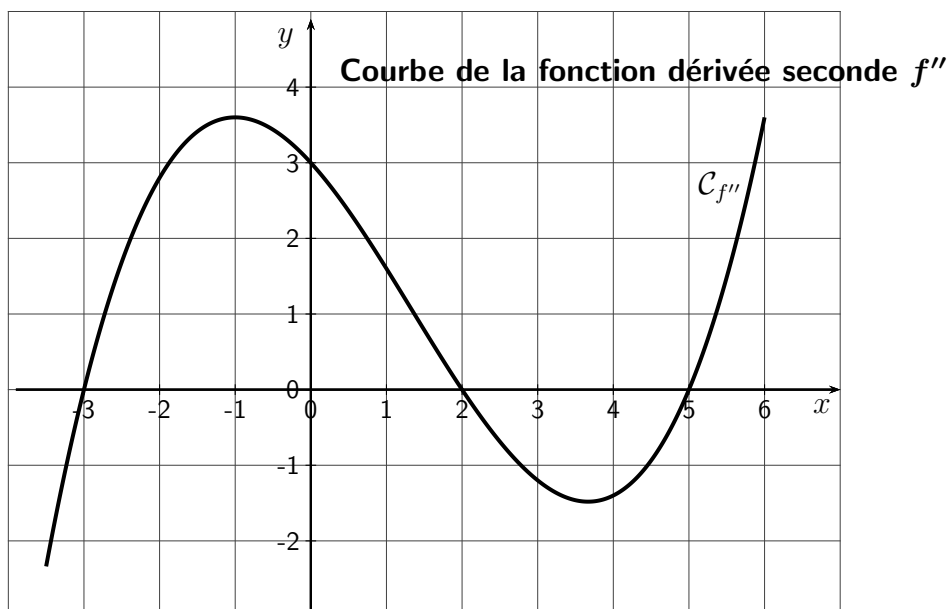
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).

Pour chaque question, trois affirmations sont proposées, une seule de ces affirmations est exacte.

Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de chaque question et la lettre de la réponse choisie pour celle-ci.

AUCUNE JUSTIFICATION n'est demandée. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève aucun point.

- On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x^2 - 2x - 1)e^x$.
 - La fonction dérivée de f est la fonction définie par $f'(x) = (2x - 2)e^x$.
 - La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 2]$.
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
- On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{3}{5 + e^x}$.
Sa courbe représentative dans un repère admet :
 - une seule asymptote horizontale ;
 - une asymptote horizontale et une asymptote verticale ;
 - deux asymptotes horizontales.
- On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_{f''}$ représentant la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3, 5 ; 6]$.



- La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3 ; 3]$.
- La fonction f admet trois points d'inflexion.
- La fonction dérivée f' de f est décroissante sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 17n + 20$.
- A. La suite (u_n) est minorée.
 - B. La suite (u_n) est décroissante.
 - C. L'un des termes de la suite (u_n) est égal à 2021.
5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,75u_n + 5$.
On considère la fonction « seuil » suivante écrite en Python :

```
def seuil() :  
    u=2  
    n=0  
    while u<45 :  
        u=0.75*u+5  
        n=n+1  
    return n
```

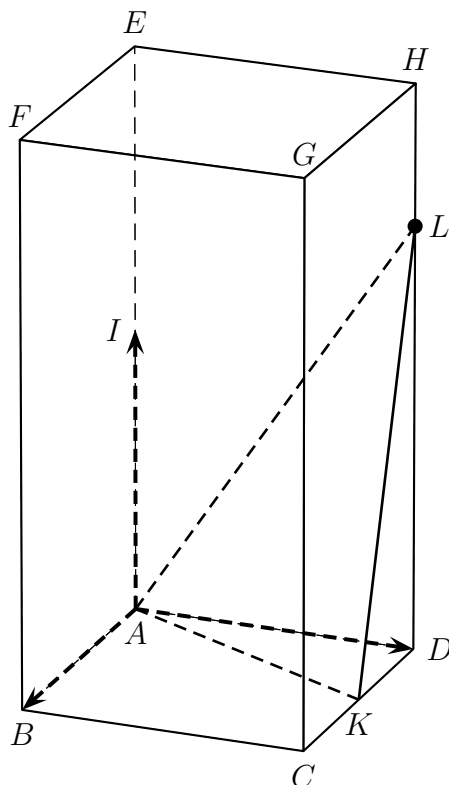
Cette fonction renvoie :

- A. la plus petite valeur de n telle que $u_n \geq 45$;
- B. la plus petite valeur de n telle que $u_n < 45$;
- C. la plus grande valeur de n telle que $u_n \geq 45$.

EXERCICE 2 commun à tous les candidats (5 points)

On considère un pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = AD = 1$ et $AE = 2$, représenté ci-dessous.

Le point I est le milieu du segment $[AE]$. Le point K est le milieu du segment $[DC]$. Le point L est défini par : $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$. N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL) .



On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AI})$.

On admet que le point L a pour coordonnées $\left(0; 1; \frac{3}{2}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AK} et \overrightarrow{AL} .
2. (a) Démontrer que le vecteur \vec{n} de coordonnées $(6; -3; 2)$ est un vecteur normal au plan (AKL) .
 (b) En déduire une équation cartésienne du plan (AKL) .
 (c) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL) .
 (d) En déduire que le point N de coordonnées $\left(\frac{18}{49}; \frac{40}{49}; \frac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL) .

On rappelle que le volume \mathcal{V} d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}$$

3. (a) Calculer le volume du tétraèdre $ADKL$ en utilisant le triangle ADK comme base.
 (b) Calculer la distance du point D au plan (AKL) .
 (c) Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL .

EXERCICE 3 commun à tous les candidats (5 points)

Une société de jeu en ligne propose une nouvelle application pour smartphone nommée « Tickets cœurs! ».

Chaque participant génère sur son smartphone un ticket comportant une grille de taille 3×3 sur laquelle sont placés trois cœurs répartis au hasard, comme par exemple ci-dessous.

	♥	
♥		
		♥

Le ticket est gagnant si les trois cœurs sont positionnés côte à côte sur une même ligne, sur une même colonne ou sur une même diagonale.

1. Justifier qu'il y a exactement 84 façons différentes de positionner les trois cœurs sur une grille.
2. Montrer que la probabilité qu'un ticket soit gagnant est égale $\frac{2}{21}$.
3. Lorsqu'un joueur génère un ticket, la société prélève 1€ sur son compte en banque. Si le ticket est gagnant, la société verse alors au joueur 5€. Le jeu est-il favorable au joueur ?
4. Un joueur décide de générer 20 tickets sur cette application. On suppose que les générations des tickets sont indépendantes entre elles.
 - (a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui compte le nombre de tickets gagnants parmi les 20 tickets générés.
 - (b) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} , de l'événement $(X = 5)$.
 - (c) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} , de l'événement $(X \geq 1)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter UN SEUL des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

EXERCICE - A

Principaux domaines abordés

- Suites
- Équations différentielles

Dans cet exercice, on s'intéresse à la croissance du bambou Moso de taille maximale 20 mètres. Le modèle de croissance de Ludwig von Bertalanffy suppose que la vitesse de croissance pour un tel bambou est proportionnelle à l'écart entre sa taille et la taille maximale.

Partie I : modèle discret

Dans cette partie, on observe un bambou de taille initiale 1 mètre.

Pour tout entier naturel n , on note u_n la taille, en mètre, du bambou n jours après le début de l'observation. On a ainsi $u_0 = 1$.

Le modèle de von Bertalanffy pour la croissance du bambou entre deux jours consécutifs se traduit par l'égalité :

$$u_{n+1} = u_n + 0,05(20 - u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Vérifier que $u_1 = 1,95$.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,95u_n + 1$.
(b) On pose pour tout entier naturel n , $v_n = 20 - u_n$. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le terme initial v_0 et la raison.
(c) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 20 - 19 \times 0,95^n$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Partie II : modèle continu

Dans cette partie, on souhaite modéliser la taille du même bambou Moso par une fonction donnant sa taille, en mètre, en fonction du temps t exprimé en jour. D'après le modèle de von Bertalanffy, cette fonction est solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = 0,05(20 - y)$$

où y désigne une fonction de la variable t , définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ et y' désigne sa fonction dérivée.

Soit la fonction L définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $L(t) = 20 - 19e^{-0,05t}$.

1. Vérifier que la fonction L est une solution de (E) et qu'on a également $L(0) = 1$.
2. On prend cette fonction L comme modèle et on admet que, si on note L' sa fonction dérivée, $L'(t)$ représente la vitesse de croissance du bambou à l'instant t .
 - (a) Comparer $L'(0)$ et $L'(5)$.
 - (b) Calculer la limite de la fonction dérivée L' en $+\infty$. Ce résultat est-il en cohérence avec la description du modèle de croissance exposé au début de l'exercice ?

EXERCICE - B

Principaux domaines abordés

- Suites, étude de fonction
- Fonction logarithme

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x - 1)$.

On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0 = 10$ et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

Partie I :

La feuille de calcul ci-dessous a permis d'obtenir des valeurs approchées des premiers termes de la suite (u_n) .

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	7,80277542
4	2	5,88544474
5	3	4,29918442
6	4	3,10550913
7	5	2,36095182
8	6	2,0527675
9	7	2,00134509
10	8	2,0000009

1. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 pour permettre le calcul des valeurs approchées de (u_n) par recopie vers le bas ?
2. À l'aide de ces valeurs, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .

Partie II :

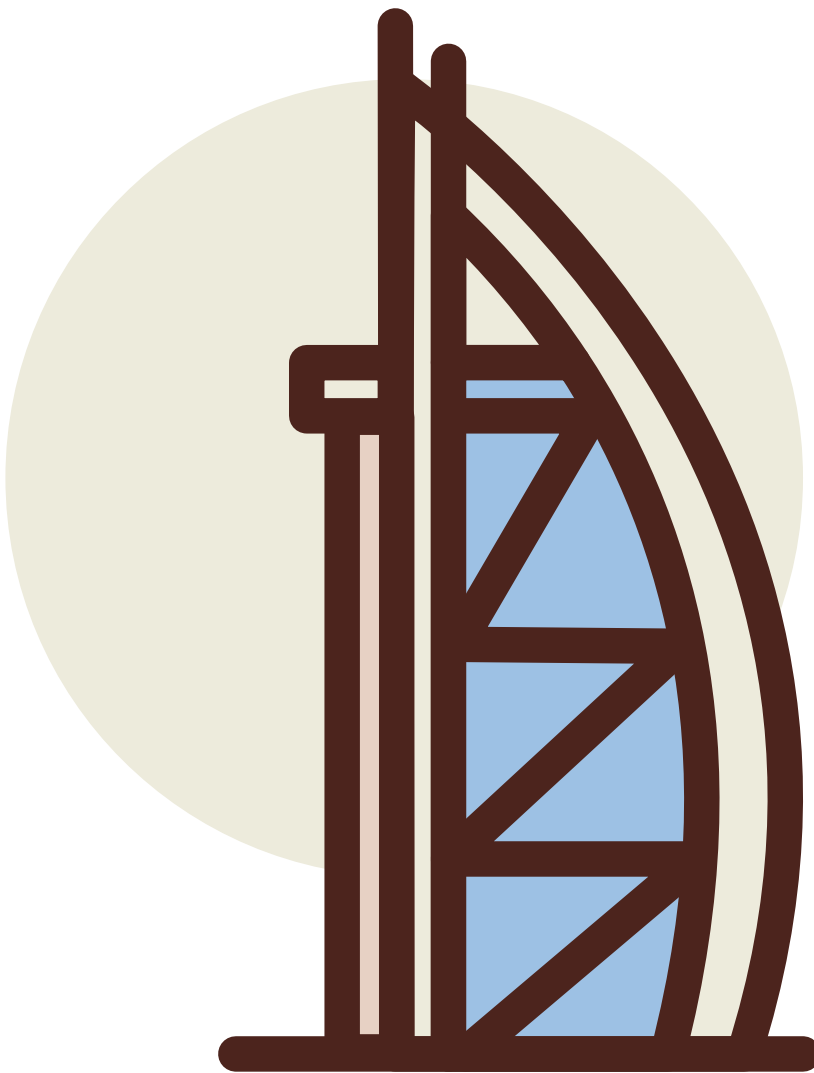
On rappelle que la fonction f est définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x - 1)$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. On admettra que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
2. (a) Soit f' la fonction dérivée de f . Montrer que pour tout $x \in]1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{x-2}{x-1}$.
(b) En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$, complété par les limites.
(c) Justifier que pour tout $x \geq 2$, $f(x) \geq 2$.

Partie III :

1. En utilisant les résultats de la partie II, démontrer par récurrence que $u_n \geq 2$ pour tout entier naturel n .
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note L sa limite.
4. On admet que L vérifie $f(L) = L$. Donner la valeur de L .

10 Centres Étrangers - Jour 1 (21-MATJ1G11)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collègue » est autorisé..

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

EXERCICE 1 commun à tous les candidats (5 points)

Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de la question et la réponse correspondante. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{-2x}$. On note f'' la dérivée seconde de la fonction f .

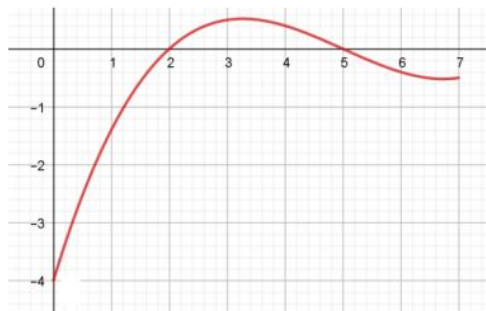
Quel que soit le réel x , $f''(x)$ est égal à :

- a. $(1 - 2x)e^{-2x}$
- b. $4(x - 1)e^{-2x}$
- c. $4e^{-2x}$
- d. $(x + 2)e^{-2x}$

2. Un élève de première générale choisit trois spécialités parmi les douze proposées. Le nombre de combinaisons possibles est :

- a. 1 728
- b. 1 320
- c. 220
- d. 33

3. On donne ci-dessous la représentation graphique de f' fonction dérivée d'une fonction f définie sur $[0 ; 7]$.



Le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0 ; 7]$ est :

a.

x	0	3,25	7
$f(x)$			

b.

x	0	2	5	7
$f(x)$				

c.

x	0	2	5	7
$f(x)$				

d.

x	0	2	7
$f(x)$			

4. Une entreprise fabrique des cartes à puces. Chaque puce peut présenter deux défauts notés A et B.

Une étude statistique montre que 2,8 % des puces ont le défaut A, 2,2 % des puces ont le défaut B et, heureusement, 95,4 % des puces n'ont aucun des deux défauts.

La probabilité qu'une puce prélevée au hasard ait les deux défauts est :

- a. 0,05
 - b. 0,004
 - c. 0,046
 - d. On ne peut pas le savoir
5. On se donne une fonction f , supposée dérivable sur \mathbb{R} , et on note f' sa fonction dérivée.

On donne ci-dessous le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

D'après ce tableau de variation :

- a. f' est positive sur \mathbb{R}
- b. f' est positive sur $] -\infty ; -1]$
- c. f' est négative sur \mathbb{R}
- d. f' est positive sur $[-1 ; +\infty[$

EXERCICE 2 commun à tous les candidats (5 points)

Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3} .

D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française. Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans.

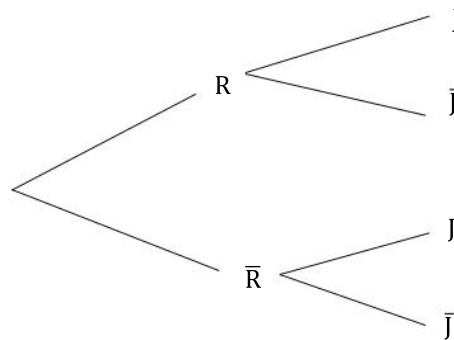
(Source : TNS-Sofres)

Partie A :

On interroge une personne au hasard et on note :

- R l'événement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».
- J l'événement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Représentez la situation à l'aide de cet arbre pondéré, que vous recopierez sur votre copie, en y reportant les données de l'énoncé.



2. Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.
3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française.
Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est $0,056$ à 10^{-3} près.
4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.

Partie B :

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun. La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise.

Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de X et préciser ses paramètres.
2. Calculer $P(X = 5)$ et interpréter le résultat.
3. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.
Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.
4. Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées ?

EXERCICE 3 commun à tous les candidats (5 points)

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.

Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n) .

Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n -ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1 .

2. Justifier que pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+1} = 0,85a_n + 450$$

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = a_n - 3\,000$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85.

b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n .

c. En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$a_n = -2\,800 \times 0,85^n + 3\,000$$

4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$$

b. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

3. On admet que pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq 4 - u_n \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

**Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.**

EXERCICE A - Géométrie dans l'espace

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$A(2 ; -1 ; 0) ; B(3 ; -1 ; 2) ; C(0 ; 4 ; 1)$ et $S(0 ; 1 ; 4)$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).
b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
c. Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan (ABC) en H.
a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).
b. Montrer que les coordonnées du point H sont $H(2 ; 2 ; 3)$.
4. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est $V = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.
Calculer le volume du tétraèdre SABC.
5. a. Calculer la longueur SA.
b. On indique que $SB = \sqrt{17}$.
En déduire une mesure de l'angle \widehat{ASB} approchée au dixième de degré.

EXERCICE B - Équations différentielles

Partie A :

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = 2e^{\frac{-1}{3}x} + \frac{2}{3}x - 2$$

1. On admet que la fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et on note g' sa fonction dérivée. Montrer que, pour tout réel x :

$$g'(x) = \frac{-2}{3}e^{\frac{-1}{3}x} + \frac{2}{3}$$

2. En déduire le sens de variations de la fonction g sur \mathbb{R} .
3. Déterminer le signe de $g(x)$, pour tout x réel.

Partie B :

1. On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad 3y' + y = 0$$

Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative, dans un repère du plan, passe par le point $M(0 ; 2)$.
3. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2e^{\frac{1}{3}x}$$

et \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

- a. Montrer que la tangente (Δ_0) à la courbe \mathcal{C}_f au point $M(0 ; 2)$ admet une équation de la forme :

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

- b. Étudier, sur \mathbb{R} , la position de cette courbe \mathcal{C}_f par rapport à la tangente (Δ_0) .

Partie C :

1. Soit A le point de la courbe \mathcal{C}_f d'abscisse a , a réel quelconque.

Montrer que la tangente (Δ_a) à la courbe \mathcal{C}_f au point A coupe l'axe des abscisses en un point P d'abscisse $a + 3$.

2. Expliquer la construction de la tangente (Δ_{-2}) à la courbe \mathcal{C}_f au point B d'abscisse -2 .

11 Centres Étrangers - Jour 2 (21-MATJ2G11)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

JOUR 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collègue » est autorisé..

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

EXERCICE 1 commun à tous les candidats (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des cinq questions, quatre réponses sont proposées ; une seule de ces réponses est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.

Barème : une bonne réponse rapporte un point. Une réponse inexacte ou une absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

Question 1 :

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2x - \frac{3}{x}$.

Une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1 est :

a. $y = 7(x - 1)$	c. $y = 7x + 7$
b. $y = x - 1$	d. $y = x + 1$

Question 2 :

On considère la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par $v_n = \frac{3n}{n+2}$. On cherche à déterminer la limite de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$	c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{3}{2}$
b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$	d. On ne peut pas la déterminer

Question 3 :

Dans une urne il y a 6 boules noires et 4 boules rouges. On effectue successivement 10 tirages aléatoires avec remise. Quelle est la probabilité (à 10^{-4} près) d'avoir 4 boules noires et 6 boules rouges ?

a. 0,1662	c. 0,1115
b. 0,4	d. 0,8886

Question 4 :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3e^x - x$.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$	c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	d. On ne peut pas déterminer la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$

Question 5 :

Un code inconnu est constitué de 8 signes. Chaque signe peut être une lettre ou un chiffre. Il y a donc 36 signes utilisables pour chacune des positions.

Un logiciel de cassage de code teste environ cent millions de codes par seconde.

En combien de temps au maximum le logiciel peut-il découvrir le code ?

a. environ 0.3 seconde	c. environ 3 heures
b. environ 8 heures	d. environ 470 heures

EXERCICE 2 commun à tous les candidats (5 points)

Au 1^{er} janvier 2020, la centrale solaire de Big Sun possédait 10 560 panneaux solaires. On observe, chaque année, que 2 % des panneaux se sont détériorés et nécessitent d'être retirés tandis que 250 nouveaux panneaux solaires sont installés.

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

On modélise l'évolution du nombre de panneaux solaires par la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,560$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux solaires au 1^{er} janvier de l'année 2020 + n .

1.

- Expliquer en quoi cette modélisation correspond à la situation étudiée.
- On souhaite savoir au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 12 000. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.
- Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10560
n = 0
while ..... :
    u = .....
    n = .....
```

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq 12\,500$.
- Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
- En déduire que la suite (u_n) converge. Il n'est pas demandé, ici, de calculer sa limite.
- On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 12\,500$, pour tout entier naturel n .
 - Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,98 dont on précisera le premier terme.
 - Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
 - En déduire, pour tout entier naturel n , u_n en fonction de n .
 - Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

Une modélisation plus précise a permis d'estimer le nombre de panneaux solaires de la centrale à l'aide de la fonction f définie pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ par $f(x) = 12500 - 500 e^{-0,02x+1,4}$, où x représente le nombre d'années écoulées depuis le 1^{er} janvier 2020.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f .
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. En utilisant ce modèle, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires dépassera 12 000.

EXERCICE 3 commun à tous les candidats (5 points)

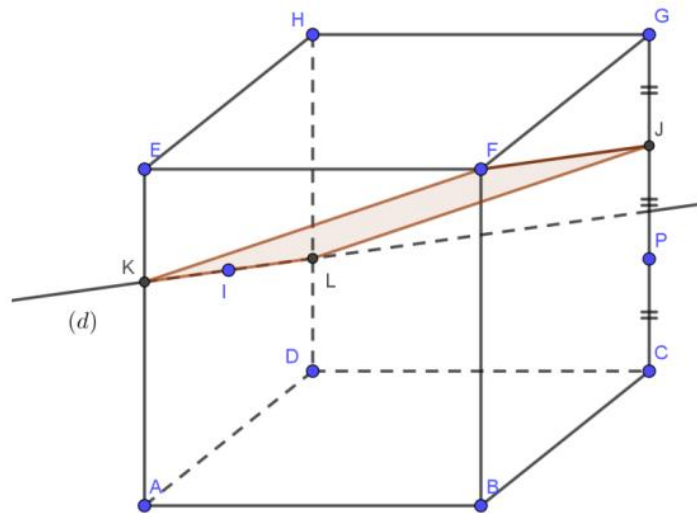
ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face ADHE et J est un point du segment [CG]. Il existe donc $a \in [0 ; 1]$ tel que $\overrightarrow{CJ} = a\overrightarrow{CG}$.

On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ).

On note K et L les points d'intersection de la droite (d) et des droites (AE) et (DH).

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

Partie A : Dans cette partie $a = \frac{2}{3}$



1. Donner les coordonnées des points F, I et J.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) .
3. a) Montrer que le point de coordonnées $(0 ; 0 ; \frac{2}{3})$ est le point K.
b) Déterminer les coordonnées du point L, intersection des droites (d) et (DH).
4. a) Démontrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.
b) Démontrer que le quadrilatère FJLK est un losange.
c) Le quadrilatère FJLK est-il un carré ?

Partie B : Cas général

On admet que les coordonnées des points K et L sont : $K(0; 0; 1 - \frac{a}{2})$ et $L(0; 1; \frac{a}{2})$.

On rappelle que $a \in [0 ; 1]$.

1. Déterminer les coordonnées de J en fonction de a .
2. Montrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.
3. Existe-t-il des valeurs de a telles que le quadrilatère FJLK soit un losange ? Justifier.
4. Existe-t-il des valeurs de a telles que le quadrilatère FJLK soit un carré ? Justifier.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

EXERCICE A - Fonction ln

Partie A :

Dans un pays, une maladie touche la population avec une probabilité de 0,05. On possède un test de dépistage de cette maladie.

On considère un échantillon de n personnes ($n \geq 20$) prises au hasard dans la population assimilé à un tirage avec remise.

On teste l'échantillon suivant cette méthode : on mélange le sang de ces n individus, on teste le mélange. Si le test est positif, on effectue une analyse individuelle de chaque personne.

Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'analyses effectuées.

1. Montrer X_n prend les valeurs 1 et $(n + 1)$.

2. Prouver que $P(X_n = 1) = 0,95^n$.

Établir la loi de X_n en recopiant sur la copie et en complétant le tableau suivant :

x_i	1	$n + 1$
$P(X_n = x_i)$		

3. Que représente l'espérance de X_n dans le cadre de l'expérience ?

Montrer que $E(X_n) = n + 1 - n \times 0,95^n$.

Partie B :

1. On considère la fonction f définie sur $[20; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + x \ln(0,95)$

Montrer que f est décroissante sur $[20; +\infty[$.

2. On rappelle $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

3. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[20; +\infty[$.

Donner un encadrement à 0,1 près de cette solution.

4. En déduire le signe de f sur $[20; +\infty[$.

Partie C:

On cherche à comparer deux types de dépistages. La première méthode est décrite dans la partie A, la seconde, plus classique, consiste à tester tous les individus.

La première méthode permet de diminuer le nombre d'analyses dès que $E(X_n) < n$.

En utilisant la partie B, montrer que la première méthode diminue le nombre d'analyses pour des échantillons comportant 87 personnes maximum.

EXERCICE B - Équation différentielle

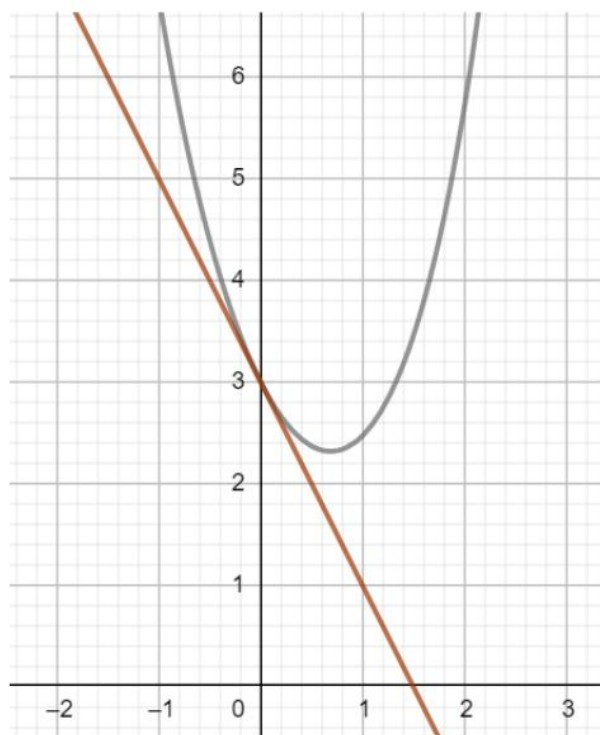
Partie A : Détermination d'une fonction f et résolution d'une équation différentielle

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^x + ax + be^{-x}$$

où a et b sont des nombres réels que l'on propose de déterminer dans cette partie.

Dans le plan muni d'un repère d'origine O , on a représenté ci-dessous la courbe \mathcal{C} , représentant la fonction f , et la tangente (T) à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0.



1. Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. En utilisant l'expression de la fonction f , exprimer $f(0)$ en fonction de b et en déduire la valeur de b .
3. On admet que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa fonction dérivée.
 - a. Donner, pour tout réel x , l'expression de $f'(x)$.
 - b. Exprimer $f'(0)$ en fonction de a .
 - c. En utilisant les questions précédentes, déterminer a , puis en déduire l'expression de $f(x)$.
4. On considère l'équation différentielle :
(E) : $y' + y = 2e^x - x - 1$
 - a. Vérifier que la fonction g définie sur \mathbb{R} par :
$$g(x) = e^x - x + 2e^{-x}$$
est solution de l'équation (E).
 - b. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.
 - c. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

Partie B : Étude de la fonction g sur $[1 ; +\infty[$

1. Vérifier que pour tout réel x , on a :

$$e^{2x} - e^x - 2 = (e^x - 2)(e^x + 1)$$

2. En déduire une expression factorisée de $g'(x)$, pour tout réel x .
3. On admettra que, pour tout $x \in [1 ; +\infty[$, $e^x - 2 > 0$.
Étudier le sens de variation de la fonction g sur $[1 ; +\infty[$.

12 Métropole - Jour 1 Remplacement (21-MATJ1ME3)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8.

La page 8/8 est une **annexe à rendre avec la copie** par les élèves ayant choisi de traiter l'**exercice A**.

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1, commun à tous les candidats (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

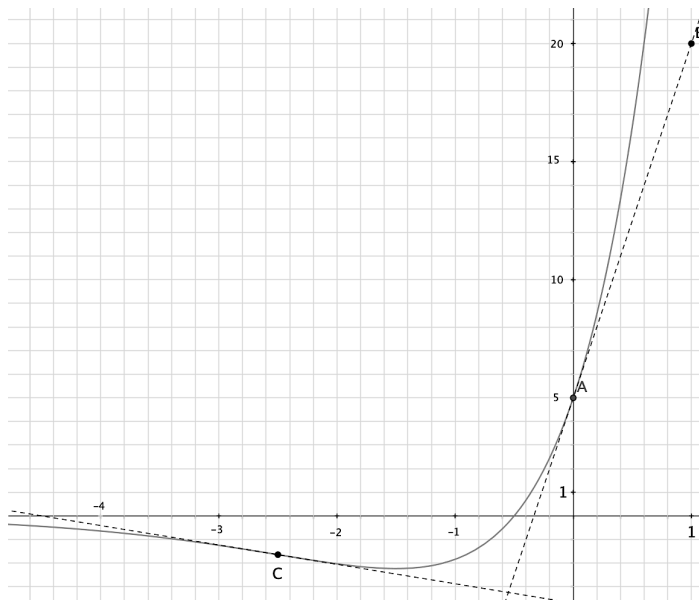
Le graphique ci-contre donne la représentation graphique C_f dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} .

On notera f' la fonction dérivée de f .

On donne les points A de coordonnées (0 ; 5) et B de coordonnées (1 ; 20). Le point C est le point de la courbe C_f ayant pour abscisse $-2,5$.

La droite (AB) est la tangente à la courbe C_f au point A.

Les questions 1 à 3 se rapportent à cette même fonction f .



1.

On peut affirmer que :

a. $f'(-0,5) = 0$

b. si $x \in]-\infty; -0,5[$, alors $f'(x) < 0$

c. $f'(0) = 15$

d. la fonction dérivée f' ne change pas de signe sur \mathbb{R}

2. On admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (ax + b)e^x$, où a et b sont deux nombres réels et que sa courbe coupe l'axe des abscisses en son point de coordonnées $(-0,5; 0)$.

On peut affirmer que :

a. $a = 10$ et $b = 5$

b. $a = 2,5$ et $b = -0,5$

c. $a = -1,5$ et $b = 5$

d. $a = 0$ et $b = 5$

3. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est définie sur \mathbb{R} par :

$$f''(x) = (10x + 25)e^x$$

On peut affirmer que :

a. La fonction f est convexe sur \mathbb{R}

b. La fonction f est concave sur \mathbb{R}

c. Le point C est l'unique point d'inflexion de C_f

d. C_f n'admet pas de point d'inflexion

4. On considère deux suites (U_n) , (V_n) définies sur \mathbb{N} telles que :

- pour tout entier naturel n , $U_n \leq V_n$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 2$.

On peut affirmer que :

- a. la suite (U_n) converge
- b. pour tout entier naturel n , $V_n \leq 2$
- c. la suite (U_n) diverge
- d. la suite (U_n) est majorée

Exercice 2, commun à tous les candidats (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{1+3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1 .
2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$.
 - a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 - c. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ .
3.
 - a. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E , détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$.

```
def seuil(E):  
    u=0.5  
    n=0  
    while ..... :  
        u=...  
        n=n+1  
    return n
```

- b. Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 10^{-4}$.
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}.$$

- a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
- b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{v_n}{v_n+1}$.
- c. Montrer alors que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{1}{1 + 0,25^n}.$$

Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3, commun à tous les candidats (6 points)

Dans le parc national des Pyrénées, un chercheur travaille sur le déclin d'une espèce protégée dans les lacs de haute-montagne : le « crapaud accoucheur ».

Les parties I et II peuvent être abordées de façon indépendante.

Partie I : Effet de l'introduction d'une nouvelle espèce.

Dans certains lacs des Pyrénées, des truites ont été introduites par l'homme afin de permettre des activités de pêche en montagne. Le chercheur a étudié l'impact de cette introduction sur la population de crapauds accoucheurs d'un lac. Ses études précédentes l'amènent à modéliser l'évolution de cette population en fonction du temps par la fonction f suivante :

$$f(t) = (0,04t^2 - 8t + 400) e^{\frac{t}{50}} + 40 \text{ pour } t \in [0; 120]$$

La variable t représente le temps écoulé, en jour, à partir de l'introduction à l'instant $t = 0$ des truites dans le lac, et $f(t)$ modélise le nombre de crapauds à l'instant t .

1. Déterminer le nombre de crapauds présents dans le lac lors de l'introduction des truites.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 120]$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer, en faisant apparaître les étapes du calcul, que pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0; 120]$ on a : $f'(t) = t(t - 100)e^{\frac{t}{50}} \times 8 \times 10^{-4}$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 120]$, puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle (on donnera des valeurs approchées au centième).
4. Selon cette modélisation :
 - a. Déterminer le nombre de jours J nécessaires afin que le nombre de crapauds atteigne son minimum. Quel est ce nombre minimum ?
 - b. Justifier que, après avoir atteint son minimum, le nombre de crapauds dépassera un jour 140 individus.
 - c. À l'aide de la calculatrice, déterminer la durée en jour à partir de laquelle le nombre de crapauds dépassera 140 individus ?

Partie II : Effet de la Chytridiomycose sur une population de têtards.

Une des principales causes du déclin de cette espèce de crapaud en haute montagne est une maladie, la «Chytridiomycose », provoquée par un champignon.

Le chercheur considère que :

- Les trois quarts des lacs de montagne des Pyrénées ne sont pas infectés par le champignon, c'est-à-dire qu'ils ne contiennent aucun têtard (larve du crapaud) contaminé.
- Dans les lacs restants, la probabilité qu'un têtard soit contaminé est de 0,74.

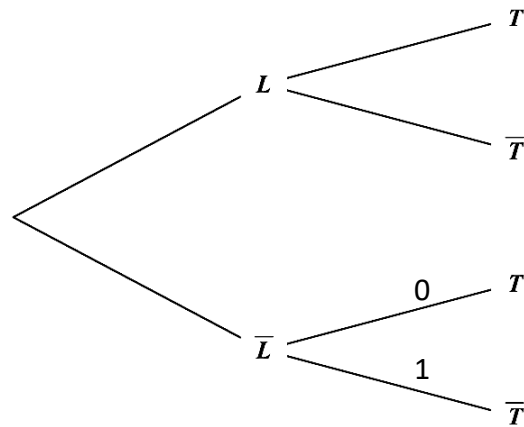
Le chercheur choisit au hasard un lac des Pyrénées, et y procède à des prélèvements.

Pour la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis au millième lorsque cela est nécessaire.

Le chercheur prélève au hasard un têtard du lac choisi afin d'effectuer un test avant de le relâcher.
On notera T l'événement « Le têtard est contaminé par la maladie » et L l'événement « Le lac est infecté par le champignon ».

On notera \bar{L} l'événement contraire de L et \bar{T} l'événement contraire de T .

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant en utilisant les données de l'énoncé :



2. Montrer que la probabilité $P(T)$ que le têtard prélevé soit contaminé est de 0,185.

3. Le têtard n'est pas contaminé. Quelle est la probabilité que le lac soit infecté ?

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés :

Géométrie de l'espace rapporté à un repère orthonormé.

On considère le cube ABCDEFGH donné en annexe.

On donne trois points I, J, et K vérifiant :

$$\overrightarrow{EI} = \frac{1}{4} \overrightarrow{EH}; \quad \overrightarrow{EJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{EF}; \quad \overrightarrow{BK} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BF}.$$

Les points I, J et K sont représentés sur la **figure donnée en annexe, à compléter et à rendre avec la copie.**

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.
2. Démontrer que le vecteur \overrightarrow{AG} est normal au plan (IJK).
3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est $4x + 4y + 4z - 5 = 0$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).
5. En déduire les coordonnées du point L, point d'intersection de la droite (BC) avec le plan (IJK).
6. Sur la figure en annexe, placer le point L et construire l'intersection du plan (IJK) avec la face (BCGF).
7. Soit $M(\frac{1}{4}; 1; 0)$. Montrer que les points I, J, L et M sont coplanaires.

Exercice B

Principaux domaines abordés :

Fonction logarithme.

Partie I

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction h en 0.
2. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.
3. On note h' la fonction dérivée de h . Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0; +\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

5. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0 ; +\infty[$.

Justifier que l'on a : $0,5 < \alpha < 0,6$.

Partie II

Dans cette partie, on considère les fonctions f et g définies sur $]0 ; +\infty[$ par :

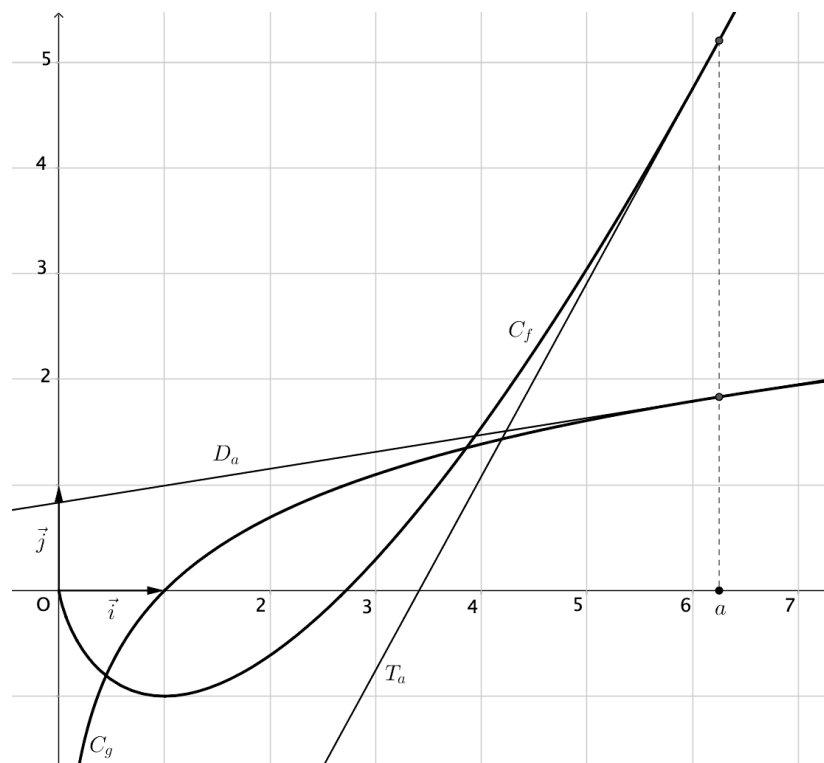
$$f(x) = x \ln(x) - x ; \quad g(x) = \ln(x).$$

On note C_f et C_g les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout nombre réel a strictement positif, on appelle :

- T_a la tangente à C_f en son point d'abscisse a ;
- D_a la tangente à C_g en son point d'abscisse a .

Les courbes C_f et C_g ainsi que deux tangentes T_a et D_a sont représentées ci-dessous.



On recherche d'éventuelles valeurs de a pour lesquelles les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

1. Justifier que la droite D_a a pour coefficient directeur $\frac{1}{a}$.

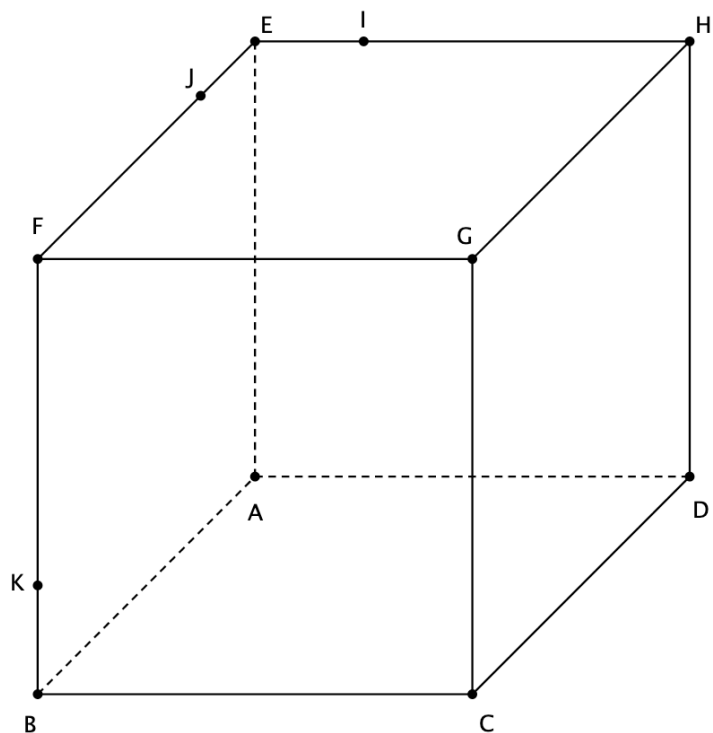
2. Justifier que la droite T_a a pour coefficient directeur $\ln(a)$.

On rappelle que dans un repère orthonormé, deux droites de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si et seulement si $mm' = -1$.

3. Démontrer qu'il existe une unique valeur de a , que l'on identifiera, pour laquelle les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.

ANNEXE A COMPLETER ET A RENDRE AVEC LA COPIE

À COMPLÉTER SEULEMENT PAR LES ÉLÈVES AYANT CHOISI DE TRAITER L'EXERCICE A.



Nom de famille :

Nom de l'anne
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)



Prénom(s) :

**Numéro
Inscription :**

Né(e) le :

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

13 Métropole - Jour 2 Remplacement (21-MATJ2ME3)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : **4 heures**

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.*

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

La page 7 est une annexe, à compléter et à rendre avec la copie.

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Exercice 1, commun à tous les candidats (4 points)

Une entreprise reçoit quotidiennement de nombreux courriels (courriers électroniques).

Parmi ces courriels, 8% sont du « spam », c'est-à-dire des courriers à intention publicitaire, voire malveillante, qu'il est souhaitable de ne pas ouvrir.

On choisit au hasard un courriel reçu par l'entreprise.

Les propriétés du logiciel de messagerie utilisé dans l'entreprise permettent d'affirmer que :

- La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que c'est un spam est égale à 0,9.
- La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que ce n'est pas un spam est égale à 0,01.

On note :

- S l'événement « le courriel choisi est un spam » ;
- I l'événement « le courriel choisi est classé comme indésirable par le logiciel de messagerie ».
- \bar{S} et \bar{I} les événements contraires de S et I respectivement.

1. Modéliser la situation étudiée par un arbre pondéré, sur lequel on fera apparaître les probabilités associées à chaque branche.

2.

a. Démontrer que la probabilité que le courriel choisi soit un message de spam et qu'il soit classé indésirable est égale à 0,072.

b. Calculer la probabilité que le message choisi soit classé indésirable.

c. Le message choisi est classé comme indésirable. Quelle est la probabilité que ce soit effectivement un message de spam ? On donnera un résultat arrondi au centième.

3. On choisit au hasard 50 courriels parmi ceux reçus par l'entreprise. On admet que ce choix se ramène à un tirage au hasard avec remise de 50 courriels parmi l'ensemble des courriels reçus par l'entreprise.

On appelle Z la variable aléatoire dénombrant les courriels de spam parmi les 50 choisis.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Z , et quels sont ses paramètres ?

b. Quelle est la probabilité que, parmi les 50 courriels choisis, deux au moins soient du spam ? On donnera un résultat arrondi au centième.

Exercice 2, commun à tous les candidats (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$,

$C(0; 1; 2)$ et la droite Δ dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 4 - t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

1. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

Réponse A : $M(2; 1; -1)$;

Réponse B : $N(-3; -4; 6)$;

Réponse C : $P(-3; -4; 2)$;

Réponse D : $Q(-5; -5; 1)$.

2. Le vecteur \overrightarrow{AB} admet pour coordonnées :

Réponse A : $\begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$;

Réponse B : $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

Réponse C : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

Réponse D : $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

Réponse A : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}, t \in \mathbf{R}$;

Réponse B : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$;

Réponse C : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$;

Réponse D : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$.

4. Une équation cartésienne du plan passant par le point C et orthogonal à la droite Δ est :

Réponse A : $x - 2y + 4z - 6 = 0$;

Réponse B : $2x + y - z + 1 = 0$;

Réponse C : $2x + y - z - 1 = 0$;

Réponse D : $y + 2z - 5 = 0$.

5. On considère le point D défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

Réponse A : $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sont coplanaires ;

Réponse B : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;

Réponse C : D a pour coordonnées $(3; -1; -1)$;

Réponse D : les points A, B, C et D sont alignés.

Exercice 3, commun à tous les candidats (sur 6 points)

Partie I

On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x - e^{-2x}$.

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur \mathbf{R} et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur \mathbf{R} , dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. Dédire des questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie II

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on appelle \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction g définie sur \mathbf{R} par :

$$g(x) = e^{-x}.$$

Les courbes \mathcal{C} et Γ (qui représente la fonction f de la **Partie I**) sont tracées **sur le graphique donné en annexe qui est à compléter et à rendre avec la copie**.

Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe \mathcal{C} le plus proche de l'origine O du repère et d'étudier la tangente à \mathcal{C} en ce point.

1. Pour tout nombre réel t , on note M le point de coordonnées $(t; e^{-t})$ de la courbe \mathcal{C} .

On considère la fonction h qui, au nombre réel t , associe la distance OM .

On a donc : $h(t) = OM$, c'est-à-dire :

$$h(t) = \sqrt{t^2 + e^{-2t}}.$$

- a. Montrer que, pour tout nombre réel t ,

$$h'(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}}.$$

où f désigne la fonction étudiée dans la **Partie I**.

- b. Démontrer que le point A de coordonnées $(\alpha; e^{-\alpha})$ est le point de la courbe \mathcal{C} pour lequel la longueur OM est minimale. Placer ce point sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie**.

2. On appelle T la tangente en A à la courbe \mathcal{C} .

- a. Exprimer en fonction de α le coefficient directeur de la tangente T .

On rappelle que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $\frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$.

On rappelle également le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration :

Dans un repère orthonormé du plan, deux droites D et D' de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si, et seulement si le produit mm' est égal à -1 .

- b. Démontrer que la droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires. Tracer ces droites sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie**.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés dans chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés :

Suites numériques ; raisonnement par récurrence.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 16 ; \quad v_0 = 5;$$

et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et v_1 .

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.

a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,1.

En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de w_n en fonction de n .

b. Préciser le signe de la suite (w_n) et la limite de cette suite.

3.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = -0,4 w_n$.

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n , $v_n \geq v_0 = 5$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 5$.

En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle l la limite de (u_n) .

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle l' la limite de (v_n) .

4.

a. Démontrer que $l = l'$.

b. On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.

Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n , on a : $c_{n+1} = c_n$.

En déduire que, pour tout entier naturel n , $c_n = 100$.

c. Déterminer la valeur commune des limites l et l' .

Exercice B

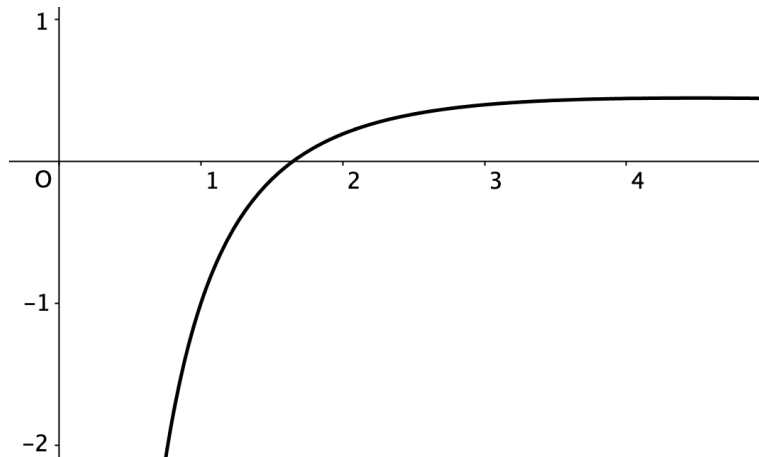
Principaux domaines abordés :

Fonction logarithme, limites, dérivation.

Partie I

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2 \ln(x) - 1}{x}$$



1. Déterminer par le calcul l'unique solution α de l'équation $f(x) = 0$.

On donnera la valeur exacte de α ainsi que la valeur arrondie au centième.

2. Préciser, par lecture graphique, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie II

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = (\ln(x))^2 - \ln(x).$$

1.

a. Déterminer la limite de la fonction g en 0.

b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0; +\infty[$, on a : $g'(x) = f(x)$, où f désigne la fonction définie dans la **Partie I**.

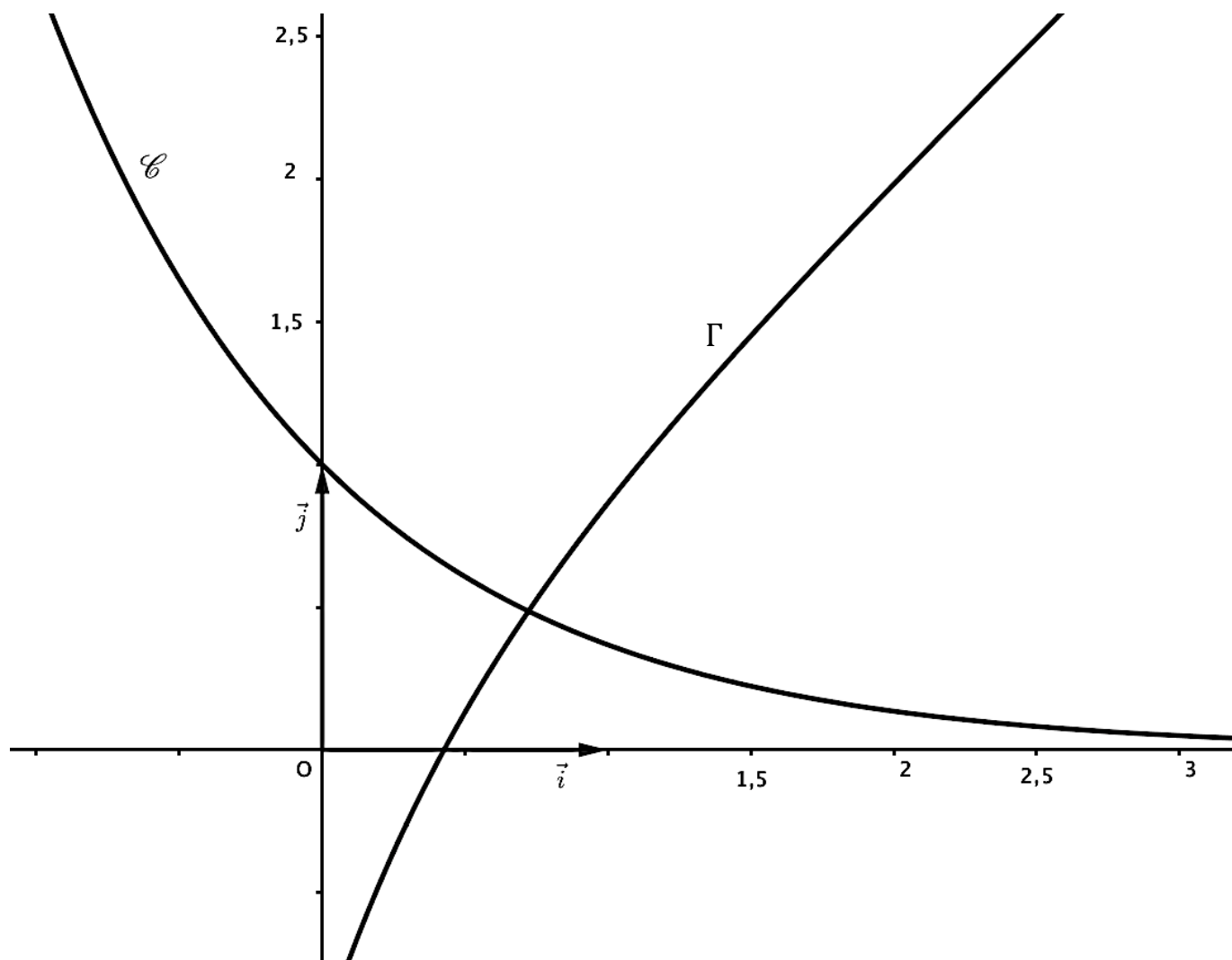
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.


On fera figurer dans ce tableau les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$, ainsi que la valeur du minimum de g sur $]0; +\infty[$.

4. Démontrer que, pour tout nombre réel $m > -0,25$, l'équation $g(x) = m$ admet exactement deux solutions.

5. Déterminer par le calcul les deux solutions de l'équation $g(x) = 0$.

Exercice 3





Nom de famille :

(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

Prénom(s) :

Numéro
Inscription :

Né(e) le :

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)